مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج٣)

الرياضيات التحليلية
بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثالث
الحسن بن الهيثم

نظرية المخروطات، الأعمال الهندسية والهندسة العملية

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. بدوي المبسوط

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثالث

الحسـن بن الهيثـم

نظرية المخروطات. الأعمال الهندسية والهندسة العملية

www.j4know.com

تُرْجِمَتْ هـذِهِ الأعمـالُ ونُشِـرَتْ

بِدَعْمٍ ماليٍّ مِنْ مدينةِ الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية،

ضِمْنَ مبادرةِ الملك عبد الله لِلْمحتوى العَرَبِيّ

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج٣)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثالث

الحسن بن الهيثم

نظرية المخروطات، الأعمال الهندسية والهندسة العملية

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. بدوي المبسوط

الفهرسة أثناء النشر ـ إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

راشد، رشدي

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة / رشدي راشد؛ ترجمة بدوي المبسوط

٥ ج (ج ٣، ٨٣٠ ص). ـ (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١٣/ج٣)
محتويات: ج ٣. الحسن بن الهيثم: نظرية المخروطات، الأعمال الهندسية والهندسة العملية.
ببليوغرافية: ص ٨١١ ـ ٨١٨.
يشتمل على فهرس الأسماء والمصطلحات.
ISBN 978-9953-82-375-1 (vol. 3)
ISBN 978-9953-82-372-0 (set)

١. الرياضيات عند العرب ـ تاريخ. ٢. ابن الهيثم، أبو علي محمد بن الحسن البصري. أ. المبسوط، بدوي (مترجم). ب. العنوان. ج. السلسلة.

510.1

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات يتبناها مركز دراسات الوحدة العربية»

العنوان الأصلي بالفرنسية

Les Mathématiques infinitésimales
du IX^ème au XI^ème siècle
vol. 3: Ibn Al-Haytham:
Théorie de coniques, constructions géométriques, et géométrie pratique
par Roshdi Rashed
(London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2000)

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ ـ لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)
برقياً: «مرعربي» ـ بيروت، فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)
e-mail: info@caus.org.lb Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى
بيروت، ٢٠١١

المحتويـات

الفصل الأوَّل
نظرية القطوع المخروطية والأبنية الهندسية
«في تمام كتاب المخروطات»
مقدّمة

الفصل الثاني
تصويب شكل بني موسى في مخروطات أبلونيوس

الفصل الثالث
«مسائل الأعمال الهندسية»

الفصل الرابع
«الهندسة العملية: المساحة»

الملحق الأوَّل

تقليد في البحث: المسبَّع المتساوي الأضلاع

الملحق الثاني
سنان ابن الفتح والقبيصي:
المساحات المناظرية

تقديـــم

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة
في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب
ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدِّم لهذه المجلدات الخمسة في الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، التي تُترجَمُ وتُنشَرُ بالتعاون بين **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية** و**مركز دراسات الوحدة العربية**، في إطار مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

تهدف هذه المبادرة إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفّذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق بترجمة الكتب العلمية الهامة، بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يفيد في التوجّه نحو مجتمع المعرفة والاقتصاد القائم عليها، ومنها ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي الموجود ورقياً وإتاحته على الشبكة العالمية، الإنترنت.

يُعَدُّ هذا العمل، الذي يستند إلى إحدى عشرة مخطوطة عربية، خطوة هامة في اكتشاف المخطوطات العربية العلمية وتحقيقها، وفي إظهار وتحليل مدرسة عربية أصيلة في الرياضيات التحليلية والهندسة ورياضيات اللامتناهيات في الصغر، مع تتبع علمائها وتطورها وإنتاجها وأصالتها.

وتبيِّن هذه المجلدات بشكل جليٍّ أن الحضارة العربية الإسلامية واللغة العربية قد قادت عربة المعرفة في مجالات العلم نحو أربعة قرون، وهذا يؤكّد ما أقرّه العالِم جورج سارتون في كتابه المرجعي **مدخل في تاريخ العلم**، كما أوضحَت هذه المجلدات، أن العلماء العرب والمسلمين لم يكونوا نَقَلَةً لِعِلْم غيرهم فقط بل أنتجوا العلوم الأصيلة، وكان منهم عباقرة كابن الهيثَم.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور هذه المجلدات الخمسة. وأود أن أشكر المؤلف، وأشكر مركز دراسات الوحدة العربية على الجهود التي بذلها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض ١٠/ ٤/ ١٤٣٢هـ
رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية
د. محمد بن إبراهيم السويل

حول الترجمة العربية لهذا الكتاب

لقد بدأ رشدي راشد منذ أكثر من خمس عشرة سنة بنشر أجزاء متتابعة من دراسة موسوعيّة متكاملة في «الرياضيّات التحليلية» تطمح إلى تجميع وثائق هندسة اللامتناهيات في الصغر المكتوبة بالعربية وإلى تحقيقها وشرحها وكتابة تاريخها خلال فترة ازدهارها القصوى بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، أي بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد. ولقد صدرت حتّى الآن خمسة مجلّدات باللغة الفرنسية من هذه المجموعة القيِّمة التي جاءت كمساهمة أساسية لا غنى عنها في دراسة التراث العلمي العربي وتحقيق ونشر مخطوطاته وكتابة تاريخه، وكذلك للتأريخ للعلوم الريّاضيّة العربيّة وتطبيقاتها.

ولقد كرَّس رشدي راشد هذا **المجلّد الثالث** لدراسة أعمال ابن الهيثم الهندسيّة موضحاً موضعها ضمن الأعمال الهندسية التي ظهرت بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد. وهكذا نجد فيه دراسات للمخطوطات الخاصة بنظريّة المخروطات وعمل المسبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة وقسمة الخطّ وفقاً لمقدِّمة أرشميدس، مع تفاصيل مهمّة عن المجادلات التي حصلت بين ريّاضيّي ذلك العصر؛ كما نجد فيه دراسة للمخطوطات الخاصة بالهندسة العمليّة مثل علم المساحة وقياس أحجام المجسَّمات. ويضمُّ هذا المجلّد العديد من نصوص المخطوطات التي جرى تحقيقها لأوَّل مرَّة؛ وهذا ما يُعطي فكرة متكاملة عن البحوث الهندسيّة من خلال وصف حيٍّ لها، كما يوضِّح إسهامات ابن الهيثم نفسه.

وأوّد أن أشكر الأستاذ رشدي راشد على السماح لي بنقل الرسوم الهندسية والعديد من العبارات الرياضية من القرص الإلكتروني للنسخة

الفرنسية الأصل، وعلى إمدادي بالنصوص العربية المستشهد بها من المخطوطات والمراجع الأخرى، وعلى مراجعته لأجزاء كثيرة من الترجمة.

لقد استخدمت في هذه الترجمة، من جهة، المصطلحات الرياضية التي اعتمدها ابن الهيثم والتي كانت متداولة في عصره، وحاولت، من جهة أخرى، قدر الإمكان انتقاء أكثر المصطلحات الرياضية الأخرى انتشاراً وتعبيراً وبعداً عن اللّبس. ولقد اعتمدتُ غالباً في ترجمة المصطلحات الرياضية الحديثة إلى العربية على «معجم الرياضيات المعاصرة» (تأليف صلاح أحمد وموفَّق دعبول وإلهام حمصي، مؤسسة الرسالة للطبع والنشر والتوزيع، بيروت ١٩٨٣).

ألفت نظر القارئ الكريم إلى ضرورة قراءة الصيغ الرياضية الواردة في الكتاب من اليسار إلى اليمين، إلا في بعض الحالات التي ترد فيها الصيغة ضمن الجملة.

وأدرك جيداً، كما يُدرك كلُّ من مارس ترجمة النصوص الرياضية والعلمية إلى العربية، أنّ المسألة في هذا المضمار معقّدة، وأشكر، سلفاً، أيّ نقد بنّاء في هذا الإطار.

بدوي المبسوط

فاتحــة

الفِكْرُ حَبْلٌ، متى يُمْسَكْ على طَرَفٍ   مِـنـه، يُـنَـطْ بـالـثُـرَيّـا ذلـك الـطَّـرَفُ

والعقلُ كالبحرِ، ما غيضَتْ غَواربُهُ   شـيـئـاً، ومـنـه بَـنـو الأيّـامِ تَـغْـتَـرِفُ

تُعبِّر أبيات أبي العلاء هذه أجمل وأدقّ تعبير عمّا قامت به أجيال من الرِّياضيّين، وما تقوم به أجيال العلماء جملةً، عند إقامة صرح هذا الفصل أو ذاك من الريّاضيّات والعلوم. وتُعبِّر أيضاً أحسن تعبير عمّا تقوم به أجيال المؤرِّخين لهذه الفصول. وكيف لا يكون ذلك كذلك؟ ألم نرَ كيف تعاقبت الأجيال، وكيف اغترَف كلّ جيل من بحر العقل ليزيده على الذي ورثه لإقامة صرح الريّاضيّات التحليليّة؟ فلقد رأينا في المجلّد الأوَّل من هذا الكتاب كيف بدأ البحث بالعربية في هذا الميدان عند الكِندي وأعدائه الألدّاء ـ بني موسى ـ وكيف طوِّرت أبحاث أرشميدس، التي تُرجِم بعضها إلى العربيّة، في حساب المساحات والأحجام المنحنية، وكذلك أبحاث غيره في المساحات والأحجام القصوى، وكيف ازدهرت على أيدي أجيال من الرياضيين، مثل ثابت بن قرَّة وحفيده إبراهيم بن سنان والخازن والقوهي وابن سهل. ورأينا أيضاً أنَّ هذا الازدهار لم يكن وليد الصدفة ولا ابن الحظّ، ولكنَّه كان نتيجة لعمل دؤوب دعمته مؤسَّسات عامّة وخاصّة. وكان الفصُّ المعرفيّ لهذا الازدهار عند ريّاضيّي هذه الحقبة هو إقامة الصلة بين الهندسة المساحية ـ أو الهندسة الأرشميدية ـ والهندسة الوضعية، أعني تلك التي تعالج الوضع والصورة كما نجدها عند أبلونيوس. ويبدو أنَّ الكثير ممن يشتغل بتاريخ الهندسة لم يُدرك حقَّ الإدراك هذه الخطوة الجديدة التي كان لها جُلُّ الأثر في تقدُّم البحث الهندسيّ. فإن كان بعض بذورها قد ألقي من قبل، فإنَّها لم تبلغ ما بلغته إلا بعد القرن التاسع، أعني حين اشتغل الريّاضيّون بأعمال أرشميدس وبكتابات أبلونيوس في الوقت نفسه، وخاصَّة كتابه الضخم: «المخروطات».

بينّا في المجلَّد الأوَّل من كتابنا هذا بعض نتائج هذه الخطوة المعرفية الجديدة، التي بدأت مع بني موسى قبل أن يتمّ نضوجها إبّان القرن العاشر الميلاديّ، التي من بينها تطبيق المناهج الإسقاطيّة والتحويلات التآلفية، مع ثابت بن قرّة وحفيده وخلفائهم من أمثال أبي سهل القوهي والعلاء بن سهل.

ثمَّ أتينا في المجلَّد الثاني بأعمال ابن الهيثم في هذا الميدان تحقيقاً وتأريخاً وتحليلاً، وبيّنّا كيف زاد ابن الهيثم لما ورثه إحكاماً ويقيناً، وكيف أخذ بسبل من خلفهم ليبلغ بها نهايتها الريّاضيّة والمنطقيّة، وكيف أضاف الجديد. وبيَّنّا أيضاً أنَّ مشروع ابن الهيثم العلميّ يقوم على ركيزتين: إتمام ما أتى به سابقوه والوصول به إلى نهايته، هذا مما ألزمه إقامته على قواعد نظريّة ثابتة ومتينة. ولقد أدَّى هذا المشروع في كثير من المجالات العلمية إلى نقد الموروث وتجديده، بل الثورة عليه. وهذا مما يُفسِّر في بعض الأحيان التوقُّف النسبي للتقدّم في بعض الفصول، بعد ابن الهيثم. فمتابعة التقدّم بعده كان يلزم تجديد المفاهيم الريّاضيّة ولغة الرياضيات التحليلية. هكذا يبدو الأمر في حساب المساحات والأحجام المنحنية، وكذلك في حساب المساحات والأحجام القصوى.

بيّن المجلّدان الأوَّلان من هذه الموسوعة، كما بيَّنت أعمال ابن سنان والقوهي وغيرهم، مما نشرناه[1]، أنَّ الهندسة العربية لم تكن ـ كما اعتقد ويعتقد البعض ـ استمراراً باهتاً للهندسة اليونانية، ولكنّها كانت امتداداً لها في بعض الميادين، وتجديداً لها في ميادين أخر، وإبداعاً لم يُسبق إليه في ميادين أخر مثل الهندسة الجبرية وبداية الهندسة الإسقاطية، وهندسة التحويلات التآلفية، . . . الخ.

كان هدفنا في هذا الكتاب، وما زال، المساهمة في إقامة صرح

---

١ انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān: Logique et géométrie au* $X^{ème}$ siècle(Leiden, E. J. Brill, 2000؛ وانظر أيضاً: **علم الهندسة والمناظر في القرن الرابع الهجري (ابن سهل ـ القوهي ـ ابن الهيثم)**، ترجمة شكر الله الشالوحي، مراجعة عبد الكريم العلاف، سلسلة تاريخ العلوم عند العرب، ٣ (بيروت، ١٩٩٦).

الهندسة العربية محقِّقين نصوصها المخطوطة تحقيقاً متأنِّياً ودقيقاً، وتحليلها تحليلاً مُعمَّقاً والتأريخ لها تأريخاً موضوعيّاً لا يُنسَبُ إليها ما لم تتضمَّنه ولا ينقصها حقَّها فيما تضمَّنته. ولتحقيق هذا الهدف، حسب طاقتنا، رأينا حصر بحثنا في هذا الكتاب على أعمال ابن الهيثم، لما أوضحناه من أسباب. وحتّى نضع هذه الأعمال وضعها التاريخي والعلميّ الصحيح، كان لا مفرَّ من أمرين آخرين: أحدهما وضع بحوث ابن الهيثم في التقليد العلمي الذي أراد البلوغ به إلى نهايته، والآخر هو وضع الرياضيات التحليلية نفسها بين أعمال ابن الهيثم الهندسية. أما الأمر الأوَّل فألزمنا تحرير المجلّد الأوَّل من هذا الكتاب، كما ألزمنا تحرير ملاحق المجلَّد الثالث، كما سيلزمنا تحرير ملاحق المجلّدات الأخَر، أمّا الأمر الثاني، فألزمنا تحرير المجلَّد الثالث كما سيلزمنا تحرير ما سيليه من المجلَّدات. كلُّ هذا يفسِّر للقارئ احتفاظنا بعنوان الكتاب، أعني الرياضيات التحليلية، لكلّ المجلَّدات، حتَّى وإن كانت تعالج فصولاً هندسية أخرى.

وإن كان لي أن أنهي هذه الفاتحة بدعاء، فهو ألاّ يضيع هذا الجهد سدى؛ فهدفي في كلّ هذه التحقيقات وما يصحبها من تحليل وتأريخ ودراسة، هو أن يتسنّى لقارئ العربية التعرُّفُ على هذا التراث بصورة لائقة، وأن يستطيع المؤرِّخون إعادة كتابة تاريخ الهندسة والرياضيات بحسب ما تقتضيه المعايير العلمية من أمانة وموضوعية، وأن تأخذ الرياضيات العربية مكانها عند التأريخ، لا أكثر منه، ولكن أيضاً لا أقلّ منه.

رشدي راشد
باريس سنة ٢٠٠٠

تمهيـــد

لقد أردنا، في المجلّدين الأوَّلين أن نعيد كتابة تقليدٍ في البحث الهندسي بكامله، وهو تقليد الأرشميديين العرب في رياضيات اللامتناهيات في الصغر. ولكنَّ هذا لم يكن هدفنا الوحيد، إذ كنَّا نريد أيضاً تكوين أوَّل نواة لمجموعة الوثائق الهندسية العربية. بقي هدفنا على حاله، وإن تغيَّر شكلياً؛ وهو جمع المواد واستخدامها في كلّ ما يؤدّي إلى الإقلاع عن طريقة في كتابة التاريخ، جزئية في أحسن الأحوال أو حكائيّة في أسوأ الأحوال. لسنا ساذجين حتّى ندّعي إعادة تصويب كاملة لهذا التاريخ؛ وما يَحمينا من الوقوع في هذا الوهم يَتمثَّل بمحدودية الوسائل التي لدينا وبغياب مؤلّفات عديدة ما زالت مؤقَّتاً مفقودة أو مفقودة نهائيّاً. لقد حاولنا ببساطة أن نكون شاملين بشكل معقول، وأن نكون على الأخصّ منهجيّين بشكل كافٍ، بحيث نكشف عن المدلول الصحيح لنشاط رياضيّ مُعيَّن في زمن مُعيَّن.

لقد بدا لنا من قبيل الحكمة أن نبدأ بأعمال ابن الهيثم الهندسية بكاملها تقريباً، قبل أن نرجع إلى أسلافه. إن تبريرَ هذا الخيار المقصود منهجيّاً يكمُن في المركز الفريد لهذا الهندسيّ الكبير؛ فهو وريث لقرنين من النشاط الكبير في البحث الهندسي؛ وهكذا أراد أن يوصل هذه البحوث إلى أبعد مدى تسمح به الإمكانيات المنطقية. ألم يكن هدفه إتمام إسهامات أسلافه اليونانيين والعرب، كما أعلن ذلك مرّات عديدة بعبارات بدون التباس؟ إنَّ مشروع ابن الهيثم الواضح هو إصلاح أخطاء أسلافه والأخذ الكامل بما استبصروه، ودفع إنجازاتهم إلى أبعد مدى ممكن. كان من الطبيعي إذن أن تُشكِّل أعمال ابن الهيثم مركزاً مُتقدِّماً ننطلق منه لنرجع بطريقة منظَّمة إلى ماضي هذا البحث الهندسي. أمّا

الطرائق التي رتَّبناها للقيام بهذا النهج التراجعي، فهي تستند إلى تاريخ التقليد النصّي لكل مؤلّف وإلى التقليد المفهوميّ الذي يندرج فيه. ولقد شرحنا ذلك في مكان آخر[١].

لقد كرَّسنا المجلّد الثاني، الذي صدر قبل المجلّد الأوَّل، بكامله لأعمال ابن الهيثم في هندسة اللامتناهيات في الصغر وفي الهندسة الأرشميدية. أمّا المجلّد الأوَّل فهو مكرَّس لكتابات الأرشميديين العرب السابقين لابن الهيثم. تندرج هذه الكتابات ضمن تقليد بدأ به بنو موسى منذ القرن التاسع وتابعه أسلافُ ابن الهيثم المباشرون مثل القوهي وابن سهل، كما أغْنَتْه سلالة من الشُّرّاح. إنّ هناك سمتين تفرضان نفسيهما مباشرة على كلّ من يُريد أن يصف هذه الإسهامات.

السمة الأولى هي أنَّ هذا التقليد قد أُسِّسَ وطُوِّرَ على أيدي هندسيّين. وكان هؤلاء، بالرغم من اطِّلاعهم على الجبر وتأثُّرهم به على درجات مختلفة، يريدون البحث في الهندسة. غير أنَّنا نشعر ضمن هذا التقليد بتأثير كثيف للجبر. فقد أدخِلَ نوع من مفهوم القياس، زِيد على لغة المقارنة التقليدية بين الأشكال، لتحديد مساحات السطوح وأحجام الأجسام المنحنية؛ كما استُخدِمت فيه بشكل مُكثَّف الجموع بين المقادير والمتباينات الحسابية.

والسمة الثانية، التي مرَّت كالسّمة الأولى بدون أن تلفت نظر أحد، هي مرافقة تقريباً للأولى، فقد عدل هؤلاء الهندسيّون عن اعتبار أنفسهم كورثة لأرشميدس فقط بل كخلفاء أيضاً لأبلونيوس. لم يحدث أبداً قبل ذلك العصر أن ترافق هذان التياران الهندسيان بمثل هذه الشدَّة. لقد كان لدى هؤلاء الرياضيين نظرية للقطوع المخروطية أكثر إعداداً من تلك التي كانت لدى أرشميدس نفسه. وكانوا على معرفة بكتابات لأبلونيوس، من بينها «كتاب المخروطات»، كما تدرَّبوا أيضاً على الاهتمام بخواصّ الوضع والصورة. وقاموا كلّهم بدون استثناء، من بني موسى حتَّى ابن

---

١ انظر: «*L'histoire des sciences entre épistémologie et histoire,» Historia scientiarum, 7.1 (1997)*, p. 1-10.

الهيثم، ببحوث مشترَكة في هندسة أرشميدس وهندسة أبلونيوس. وكان هذا التوحيد بين التيّارين عملاً مؤثِّراً ومبدأ للاكتشاف والتنظيم في آن واحد. وهكذا لم يكن من وليد الصدفة أنَّ فصولاً جديدة لم تلبث أن ظهرت: التحويلات النقْطية، دراسة بعض الإسقاطات، الهندسة الجبرية، . . . هذا هو المشهد الجديد الذي تُظهره أعمال ابن الهيثم، الذي يُشكِّل خلفيّة بحوثه في هندسة اللامتناهيات في الصغر. سنكرِّس المجلّدات التالية لدراسة النصوص، نظراً إلى كثرتها وغِناها أيضاً. إنَّ العنوان الذي وضعناه للمجلّدين الأوَّلين لم يَعُد ملائماً كثيراً؛ غير أننا قرّرنا الاحتفاظ به لكي لا نقطع الاتصال بين عناصر هذه المجموعة؛ وسيدلُّ العنوان الفرعي على الموضوع الذي يُنظَّم حوله كلّ كتاب. هذا الحلُّ، الذي لا يرضينا تماماً، هو الحلَّ الأقل سوءاً من الناحية العملية.

لقد قام كريستيان هوزيل، مدير البحوث في مركز البحوث الوطني الفرنسي، وفقاً للقواعد التي اتبعناها لهذه المجموعة، بقراءة هذا المجلّد؛ فليتقبَّل كلمات شكري الحارَّة. أوجِّه امتناني، أيضاً، إلى ألين أوجيه، مهندسة الدراسات في مركز البحوث الوطني الفرنسي، التي حضَّرت النسخة الفرنسية من هذا المجلّد للطباعة وحضَّرت له معجم المفردات والفهرس.

رشدي راشد

بور لا رين، ١٩٩٩

تنبيه

لقد استخدمنا الأحرف لتسمية المخطوطات، وفقاً لمصطلحات واردة في المراجع.

< > يفصل هذان القوسان ما تجب إضافته لكي يسدَّ نقصاً في نصّ مخطوطة ما.

[ ] يفصل هذان القوسان المعقوفان الكلمة أو المقطع الذي يجب حذفه لكي يُحفَظَ تماسكُ النصّ.

/ هذه الإشارة تدلُّ على نهاية الورقة في المخطوطة المعنية بالأمر.

مقدِّمـــة

القطوع المخروطية والأعمال الهندسية

لاحظ الهندسيّون اليونانيون بسرعة أنَّ الأعمال الهندسيّة لا تنحصر فقط ضمن المسائل الخاصة بالسطوح المستوية، وأنَّ المسائل «القابلة للعمل» ليست فقط تلك التي يُمكن حلّها بواسطة المسطرة والبركار. ولقد دفع هذا الاكتشاف المهمّ بعض الرياضيين إلى البحث عن منحنيات مختلفة عن الدائرة، وخاصة المنحنيات المخروطيّة. إنَّ تاريخ هذه الأعمال الهندسية قد رُويَ مراراً، وهذا ما لا يدع مجالاً للتوقُّف عنده[1]. لنذكِّر ببساطة بأنَّ القطوع المخروطية قد استُخدِمت منذ زمن بعيد حتَّى في القرن الرابع قبل الميلاد لحلّ مسألة خاصَّة بالهندسة المجسَّمة؛ إذ إنَّ مانخمس (*Ménechme*) استعان بقطع مكافئ وبقطع زائد لحلّ مسألة «مضاعفة حجم المكعَّب». هل كان هذا الاستخدام عملاً معزولاً أم كان مُعتاداً في ذلك الزمن؟ هل كان عملاً مؤسِّساً لنظرية المخروطات نفسها؟ إنَّ الجوابَ عن هذه الأسئلة مستحيلٌ، بسبب الغموض الذي يلفُّ أصول هذه النظرية. ولكنَّ الذي يهمُّنا هنا هو أن نتحقَّق أن المنحنيات المخروطية قد استُخدِمت منذ زمن بعيد في عمل حلول للمسائل الخاصّة بالهندسة المجسَّمة.

تناول قونون الساموسي (*Conon de Samos*)، بعد مانخمس (*Ménechme*) بفترة وجيزة، أيْ في أواسط القرن الثالث قبل الميلاد، المسألة نفسها بمجملها، وفقاً لما ذكره أبلونيوس. يُخبرنا هذا الأخير بالفعل، في مقدِّمة المقالة الرابعة من «كتاب المخروطات»، أنَّ قونون الساموسي اهتمّ بالقطوع المخروطية، وقام ببحوث لمعرفة عدد نقاط التقاطع فيما بينها، أي «أكبر

[1] انظر: Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vol. (*Oxford, 1921; reprod. Oxford, 1965); O. Becker, Grundlagen der Mathematik*, 2e éd. (Munich, 1964).

عدد من النقاط التي تتقاطع عليها القطوع المخروطية التي لا تتطابق بشكل كامل فيمكنها أن تتلاقى فيما بينها»[٢]. هذا هو الصدى الوحيد والبعيد الذي وصل إلينا حول كيفيّة حصول هذا البحث وهدفه. فهل هو شبيه بالبحث الذي قام به أبلونيوس في المقالة الرابعة من «كتاب المخروطات»، حيث يُناقِش عدد النقاط مُستَخدِماً استدلالاً بالخُلْف؟ نحن نجهل ذلك؛ ولكنَّ هذه الشهادة الهامَّة لأبلونيوس تسمح لنا بالقول إنَّ بعض الرياضيين الذين لا يَقلّون شأناً بأهميتهم، مثل قونون الذي ذكرناه، قد حاولوا بعد مانخمس، أن يدرسوا المنحنيات المخروطية، أو على الأقلّ، عددَ نقاط التقاطع فيما بينها. وإذا تابعنا قراءة ما كتبه أبلونيوس نعلم أنَّ هذا البحث لقونون كان موضوع انتقاد لسببين، في آن واحد، يخصَّان دقة هذا العمل والفائدة المرجوَّة منه. فلقد وجَّه نيقوطاليس السيريني (*Nicotalès de Cyrène*)، المعاصر لقونون انتقاداً مزدوجاً، إلى هذا الأخير، نقله أبلونيوس بالعبارات التالية:

> عرض قونون الساموسي مسألة التقاطع على تراسيديوس (*Trasydée*) ولكن دون أن يتطرَّق إلى البرهان، كما كان يجب عليه أن يفعل؛ ولهذا السبب وجَّه إليه نيقوطاليس السيريني اللومَ بحقٍّ[٣].

وإذا كان أبلونيوس مُتَّفقاً مع نيقوطاليس في هذا الانتقاد الأوَّل لقونون، فإنَّه لا يوافقه على انتقاده الثاني حيث اعتبر نيقوطاليس أنّ المسائل التي أثارها قونون غير مفيدة:

> يقول < أبلونيوس > إنَّ نيقوطاليس هذا الذي ذكرنا لمخالفته لقونون رغم أنَّه لا يحتاج إلى شيء مما استنبطه قونون في معرفة التقسيم، وليس زعمه حقٌّ، وذلك أنَّه إذا كان ممكناً أن يعلم أمر التقسيم من غير حاجة إلى هذه الأشياء، فإنَّ معرفة بعضه تكون أسهل إذا علم على هذه الجهة. وبهذه الأشياء نعلم ما كان منه غير محدود أو ما كان على جهات كثيرة، وما لا يمكن أن يكون البتّة[٤].

---

٢ انظر: *Apollonius, Les Coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites par Paul Ver Eecke* (Paris, 1959), p. 281.

٣ المرجع السابق ص. ٢٨١

٤ المرجع السابق ص. ٢٨٢

لقد جرت محاولة في منتصف القرن الثالث قبل الميلاد لإحالة بعض المناقشات (التحديدات) إلى تحديد نقاط التقاطع بين قطعينْ مخروطيَّينْ، ولكنَّ هذه المحاولة لا ترتكز على أيَّة قاعدة متينة وتشكو من غياب البرهان. هل فكَّر، لهذا السبب، بعضُ الرياضيين مثل نيقوطاليس، بإمكانية الاستغناء عنها؟ وتبقى هناك مسألة بدون حلٍّ: كيف كان موقف أرشميدس حول هذا الموضوع، وهو الصديق الأصغر سنّاً لقونون؟ هل تَبع قونون وتبنّى هذه التقنيَّة الجديدة أم أنَّه اعتمد على تقنيّة نيقوطاليس؟ هل واصل تفضيل « تقنيّة النيوسِس» (*neusis*)[٥] أم أنَّه بدأ يتحوَّل نحو التقنيّة الجديدة ـ تقاطع القطوع المخروطية ـ لبساطتها؟ يُرجِع أرشميدس، في كتاب «اللولب» (*La Spirale*)، بعض القضايا إلى التقنية القديمة ويبدو كأنَّه يُسَلّم بأنَّ المناقشة قد تمَّت بواسطتها (انظر القضايا ٥، ٦، ٧ و ٩). هل يُمكن أن نستنتج أنَّ هذه التقنيّة الجديدة كانت قد بدأت تحلُّ محلَّ التقنيّة القديمة، على الأقل في مُحيط قونون؟ وقد يتطلّب إصلاحُ هذا الوضع تقوية هذه التقنيَّة، التي ابتكرها قونون، باستدلالات مُتَّسِقة؛ وهذا ما قد يستلزم بدوره معرفة فُضْلى بالخواصّ المحلّية وبخواصّ القطوع المخروطية والخطوط المقارَبة في اللانهاية.

ولكنَّ هذه المعرفة، كما يبدو، كانت لم تزل غير مُكتملة، إذ إنَّ اكتمالها قد حصل فيما بعد. وسنرى أنَّ تاريخ هذا الميدان مرتبِط، تحديداً، بتاريخ هذه المعرفة. يبقى أنَّ أبلونيوس، خلافاً لنيقوطاليس، لم يَرفض منهج قونون بكامله؛ فهو مع إقراره بالضُعف المنطقي لهذا المنهج، يعترف بالقيمة الاستكشافية للمسائل والطرائق التي وجدها قونون. هل يُمكن أن يُفسِّر هذا الوضع موقفَ أرشميدس الذي كان أصغر سنّاً من قونون وأكبر سنّاً بجيل أو جيلين من أبلونيوس؟ وقد يحدث أن يكتفي أرشميدس من وقت إلى آخر ـ انظر مثلاً مقدِّمة القضية الرابعة من المقالة الثانية من كتاب «الكرة والأسطوانة» ـ بعد أن يعرض مسألة خاصة بالهندسة المجسَّمة، بتحديد الحلّ بدون إعطاء البرهان. فهل كان يريد،

---

[٥] أي «الرسم بالآلة»: وضع خطّ بين منحنٍ (دائرة على سبيل المثال) وخطّ مفروض بحيث يكون الخطّ الموضوع مائلاً نحو نقطة مفروضة.

كما ارتأى ابن الهيثم بعد ذلك باثني عشر قرناً، أن يتجنَّب استخدام تقاطع القطوع المخروطية لنفس السبب المذكور أعلاه؟ مهما يكن من أمر فإنَّ لوم نيقوطاليس وسكوت أرشميدس وحذر أبلونيوس لم يمنع استخدام القطوع المخروطية لحلّ المسائل الخاصَّة بالهندسية المجسَّمة. وهكذا استخدم ديوقليس (*Dioclès*) الذي خلف أرشميدس وعاصر أبلونيوس[٦] التقاطع بين قَطعيْنْ مكافئين لحلِّ مسألة «مضاعفة حجم المكعَّب».

لقد كان إسهام أبلونيوس الشخصي في هذا الميدان أكثر أهمِّيَّة من إسهام ديوقليس، وإن لم يكن تأثيرُه مباشراً. ونحن نشير خاصّة إلى المقالة الخامسة من «المخروطات» التي كرَّسها لدراسة الأعمدة على القطوع المخروطية ولتحديد مجموعة النقاط التي ستُسَمَّى فيما بعد مُتَبَسِّطة المنحني (هويغنس *Huygens*). درس أبلونيوس المُتَبَسِّطة ـ عذراً لهذه المفارَقة التاريخية ـ عن طريق مناقشة وجود نقاط التقاطع بين قطع مخروطي وقطع زائد ذي خطَّين مقارَبيْن متعامِديْن. فهو يقوم في القضايا ذات الأرقام ٥١، ٥٢، ٥٥، ٥٦، ٥٨، ٥٩، ٦٢ وَ ٦٣ من هذه المقالة الخامسة بدراسة التقاطع بين القطع الزائد ذي الخطَّين المقارَبيْن المتعامِديْن وكلٍّ من القطوع المخروطية الثلاثة. ولكنَّ هذه الدراسة، التي هي الأكثر إحكاماً بين تلك التي وصلت إلينا في هذا الموضوع من قِبَل الرياضيين الهلّينستيّين، تشكو فيما يخصُّ المسألة التي تهمُّنا هنا من حَصْرَين: إذ إنَّ الأمر يتعلّق، في جميع الحالات، بقطع زائد ذي خطَّين مقارَبيْن متعامِديْن، كما إنَّ التقاطعَ ينقصه البرهان. وليس هذا النقصان نتيجة لعجز من قِبَل الرياضي ولا لانعدام الوسائل التي تسمح جزئياً على الأقلّ بالقيام بهذا البرهان. بل إنَّ مثل هذا المنهج، ببساطة، لم يكن بعدُ مطلباً برهانيّاً، إذ إنَّه يبدو واضحاً في كلّ الحالات. وحتَّى لو كنّا نستطيع أن نستشفَّ هذا البرهان بين السطور ضمن إسهامات مثل إسهام أوطوقيوس، وهذا ما يعوِّض البراهين الناقصة في «الكرة والأسطوانة»، فإنَّ هذا البرهان لا يظهر في هذه الإسهامات كمعيار يجب تحقيقه.

---

٦ انظر: Les Catoptriciens grecs. I: Les miroirs ardents, Textes établis, traduits et commentés par R. Rashed, Collection des Universités de France (Paris, 2000)، ص. ٧٨ وما يليها.

وهكذا يرتسِم تطوُّرُ البحث حول تقاطع القطوع المخروطية، قبل بداية القرن التاسع. ويتعلّق الأمر، كما يظهر بوضوح، بإسهامات نادرة ومبعثَرة أجريَت هنا وهناك لحلِّ بعض المسائل الخاصَّة بالهندسة المجسَّمة، واستُخدِم فيها التقاطع بين القطوع المخروطية من حين إلى آخر (ولم يتردَّد المؤلّفون في استخدام منحنيات أخرى؛ ولو أن بابوس كان يميل، كما يبدو، إلى تفضيل القطوع المخروطية على غيرها من المنحنيات في المقالتين الثالثة والرابعة من مجموعته الرياضية). لن نُعيد هنا كتابة تاريخ هذا الميدان الذي حُرِّرَ بإتقان مرّاتٍ عديدة. يكفي بأن نُذكِّر باختصار بالمسائل الخاصة بالهندسة المجسَّمة. لقد أشرنا إلى «مضاعفة حجم المكعَّب»، وإلى مقدِّمة القضيّة الرابعة من المقالة الثانية من كتاب «الكرة والأسطوانة» وإلى المقالة الخامسة من كتاب «المخروطات»، وإلى تثليث الزاوية. ولنلاحظ أيضاً الحلولَ العديدة التي تراكمت مع الزمن لبعض هذه المسائل.

إنَّ مثال مضاعفة حجم المكعَّب والمُتَوَسِّطينْ بليغٌ بوجه خاصّ في هذا الصدد: عند ديوقليس وبابوس وأوطوقيوس نجد ما لا يقلُّ عن عشرين حلاًّ، من بينها عدة حلول تُستخدَم فيها القطوعُ المخروطية. يبقى علينا أن نلاحظ، وهذا جوهريّ بالنسبة إلى مستقبل البحث بدءاً من القرن التاسع الميلادي، أنَّ هذه المسائلَ وحلولها تستَخْدِمُ مفاهيمَ جديدة حول المنحنيات وخواصِّها، مع العلم أنَّ إعداد هذه المفاهيم قد تحقَّق، فيما بعد، على أيدي رياضيين متأخِّرين. ولنلاحظ من جهة أخرى أنَّ هذه المسائل كانت تعبِّر في ذلك العصر عن رغبة في توسيع الهندسة الأقليدية.

لقد أعيدَ بكثافة، ابتداء من القرن التاسع، تناولُ المسائل الموروثة من قِبَل الرياضيين اليونانيين. وحتّى لو كان الكلام على نتائجَ جديدة سابقاً لأوانه، فإنَّه لا يمكن إلا أن نلاحظ تغيُّر وإصلاح الظروف المحيطة بالبحوث. فنحن نلاحظ، من جهة، تزايداً غير مسبوق للدراسات المكرَّسة لهذه المسائل الموروثة، خلال فترة زمنيّة قصيرة نسبيّاً.

كما نلاحظ، من جهة أخرى، استخدامَ تقاطع القطوع المخروطية، وحدَها بدون غيرها تقريباً، لحل هذه المسائل. وإنَّ استخدام طرائق أخرى لم يكن نادراً فحسب، بل إنَّه يبدو كصدى لذكرى قديمة لدى بني موسى[٧]، ولدى البيروني فيما بعد. وهذه الطرائق لم تعد تتطلّب، على كلِّ حال، استخدام المنحنيات المتسامية. وهذا يعني أننا أمام مجهود مضاعف مع نوع من الإجماع على حصر الطرائق المستَخدَمة بتلك الخاصة بتقاطع القطوع المخروطية. وهكذا أصبح الأمر يتعلّق بِـ «ميدان عمل» للقطوع المخروطية.

ولكنَّ هذا الميدان ما لبث أن توسَّع. ولقد جرت هذه الحركة في أوَّل الأمر من خلال الفكر الهلينيستي تقريباً. والمثال الأكثر تعبيراً في هذا الخصوص هو مثال المُسَبَّع المتساوي الأضلاع. فبينما لم يترك لنا الرياضيون اليونانيون أيَّ عمل للمسبَّع، نشهد في نهاية القرن العاشر جدلاً حقيقياً، داخل الأسرة الرياضيّة، أدَّى إلى ظهور ما لا يقلُّ عن اثنتي عشرة رسالة مكرَّسة لهذا الموضوع. ولكنَّ هذا التوسُّع المستوحى من الرياضيات الهلينيستية قد ترافق مع تطوُّر لهذا الميدان نفسِه، مع هدفٍ جديدٍ نشأ من المحاولات الأولى لحل بعض المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة بواسطة القطوع المخروطية. ولقد بدأتْ بالفعل، في نهاية القرن التاسع، إثارة هذه المسألة التي بقيت موضوع بحث إلى أن قدَّم الخيَّام حلّها العامّ. إنَّ أسماء الماهاني والخازن والقوهي وابن عراق وأبي الجود خاصة تدلُّ على بعض المراحل في هذا المشروع. لقد تغيَّرت، بفضل أعمال هؤلاء، ملامحُ ميدان حلول المسائل الخاصّة بالهندسة المجسَّمة بواسطة القطوع المخروطية؛ إذ إنَّه قد تضمَّن آنذاك، إلى جانب المسائل القديمة، تلك التي أثيرت عن طريق الجبر.

يقابل هذا التباينَ في الأصول، كما أشرنا سابقاً، توحيدٌ في طرائق

---

٧ انظر: الفصل الأوَّل من المجلّد الأوَّل من هذه الموسوعة: **الرياضيات التحليلية، بنو موسى، ثابت بن قرّة، ابن سنان، الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود.**

العمل؛ إذ إنَّ الطريقة الوحيدة التي اتُّبِعت، من بعدُ، هي استخدام تقاطع القطوع المخروطية. وهذا، بالتحديد، ما يُميِّز البحث، كما يبدو، انطلاقاً من القرن التاسع.

ينتمي ابن الهيثم إلى هذا التقليد، وهو الذي عدَّله. ونحن نشهد معه إنهاء تحويل «ميدان العمل» إلى فصل في الهندسة مُكرَّس للأعمال الهندسية. ولكن، قبل أن نفصِّل ونحلّل هذا التطوُّر النظري، لنتوقَّف عند أعمال ابن الهيثم المكرَّسة للأعمال الهندسية. نعدُّ منها ما لا يقلُّ عن عشر رسائل.

تتضمّن المجموعة الأولى ثلاث رسائل:

١ ـ «في مقدِّمة ضلع المسبَّع»

٢ ـ «في عمل المُسَبَّع في الدائرة»

٣ ـ «في قسمة الخط الذي استعمله أرشميدس في المقالة الثانية من كتابه في الكرة والأسطوانة».

تعالج هذه المؤلّفات الثلاثة المسائل التي أثارها سابقو ابن الهيثم. وسوف نرى أنَّ هذا الأخير يحاول في كلِّ مرّة إتمام دراسة المسألة التي وضعها سابقوه وحلّوها في حالة خاصّة، أو بدون برهان على تقاطع بين قَطعين مخروطيّيْنْ.

تُظهِر المجموعة الثانية من هذه الرسائل اعتماداً واضحاً على الجبر.

٤ ـ «في مسألة عددية مُجَسَّمة»

٥ ـ «في استخراج أربعة خطوط»

يعالج هذا المؤلّف الأخير، المفقود للأسف، المسألة التالية: نُريد أن نجد أربعة خطوط بين خطَّيْنْ بحيث تكون الخطوط الستة في تناسب مستمرّ. يكتب الجبريّ الخيّام:

«وذلك قد بيّنه أبو علي ابن الهيثم إلا أنَّه صعب جدّاً لا يُمكن أن يلحق بكتابنا هذا.»[8].

تؤدّي هذه المسألة، في الواقع، إلى معادلة من الدرجة الخامسة بحيث يجري حلّها بواسطة التقاطع بين قطع زائد وقطع مكافئ مُعمَّم (مكعَّبة، أي منحنٍ من الدرجة الثالثة). إنَّ شهادة الخيّام تُذكِّرنا بأنَّه كان لدى ابن الهيثم طريقة مشابهة لتلك التي نجدها لاحقاً عند فرما (*Fermat*) ضمن كتابه *Dissertatio Tripartita*.

أما المجموعة الثالثة فهي تضمُّ رسالة واحدة:

٦ ـ «في تمام كتاب المخروطات»

ولقد لعب هذا المؤلّف دوراً أساسيّاً في تكوين فصل الأعمال الهندسية.

تتشكَّل المجموعة الرابعة والأخيرة من عدَّة رسائل تعالج، حسب عناوينها، المسائل الملحقة ببناء القطوع المخروطية.

٧ ـ «في خواصّ القطوع»

عنوان هذا المؤلّف هو مثيل لعنوان مؤلّف آخر حول الدائرة («في خواصّ الدائرة»)، محقَّق في المجلّد الرابع من هذا الكتاب[9]. لا يدرس ابن الهيثم في هذا المؤلّف الأخير الخواص المتريّة فحسب، بل أيضاً الخواصّ التآلفية، بالإضافة إلى بعض الخواصّ الإسقاطية. فهل درس ابن الهيثم في نص رسالته «في خواصّ القطوع المخروطية» نفس الخواصّ ولكن للقطوع المخروطية؟ إنَّ هذا غيرُ مُستبعَد، فالتشابه بين العنوانين يوحي بذلك، كما يوحي بذلك اهتمام سابقي ابن الهيثم ـ ابن سنان والقوهي وابن سهل. . . ـ بهذه الخواصّ نفسها.

---

٨ انظر: رشدي راشد وبيجان وهاب زاده: **رياضيات عمر الخيام**، ترجمة نقولا فارس، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت ٢٠٠٥، ص. ٢٢٤، ١٠-١١.

٩ انظر المجلّد الرابع من هذه الموسوعة، الفصل الأول.

٨ ـ «في عمل القطوع المخروطية»

لم يُذكَر هذا المؤلَّف، بخلاف المؤلَّف السابق، من قِبَل كتّاب السِّيَر القدامى ولا من قِبَل الرياضيين الذين نعرفهم. ولكنَّ ابن الهيثم نفسه يَذكُره[١٠]. في رسالته «في المرايا المُحْرِقة بالقطوع المكافئة». ونفهم من سياق كلامه أنَّ ابن الهيثم قد برهن فيه الخاصّة التالية للقطع المكافئ: المسافة بين البؤرة والرأس تساوي ربع الضلع القائم. لقد خُصِّص هذا المؤلَّف المفقود، بدون شكٍ، لرسم القطوع المخروطية؛ وقد يُشبِه نوعاً ما مؤلَّف ابن سنان «في رسم القطوع الثلاثة»[١١].

٩ ـ «في بركار القطوع»

يوحي هذا العنوان، الذي أورده كُتّاب السِّيَر القدامى، بأنَّ هذا المؤلَّف يدرس آلة من نوع «البركار التامّ» للقوهي مُخصَّصة لرسم القطوع المخروطية. إنَّ ضياع هذا المؤلّف يحرِمنا بالطبع من إسهام جديد، بعد إسهاميْ القوهي وابن سهل، في دراسة الآلات الرياضية المكرَّسة لرسم القطوع المخروطية.

١٠ ـ «في استخراج جميع القطوع بطريق الآلة»

لقد ذكر ابن الهيثم[١٢] بنفسه هذا المؤلّف، ولكن لم يذكره أحد من كُتَّاب السِّيَر القدامى أو من الرياضيين. يُعالِج هذا المؤلّف، كما يبدو، نفس الموضوع السابق؛ ويحقُّ لنا أن نتساءل إذا كان هذا المؤلّف، في الواقع، هو نفس المؤلّف السابق الذي ذكرناه بعنوانه الحقيقي، بينما يرد هنا بعنوان يُظهِر مُحتواه.

١٠ انظر المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، الجدول التلخيصي لأعمال ابن الهيثم، رقم ٩، ص. ٤٧٨.

١١ انظر الفصل الثالث في: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au x^e siècle* (Leiden, 2000).

١٢ انظر المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، الجدول التلخيصي لأعمال ابن الهيثم، رقم ٣٧، ص. ٤٨٦.

تكفي هذه العناوين المختلفة لتُظهِر لنا ابن الهيثم في مُعترَك بحوثه حول خواصّ القطوع المخروطية الضرورية للقيام بتطبيقاتها. فهو يهتمُّ بطرائق رَسْمها وبخواصّ وضعها وشكلها وليس فقط بخواصّ القياس، أي بكلّ ما يبدو ضرورياً للأعمال الهندسية. يبقى علينا إذاً أن نعيد منهجيّاً دراسة النصوص التي وصلت إلينا من هذه المجموعات المختلفة.

الفصل الأوَّل

نظرية القطوع المخروطية والأبنية الهندسية

"في تمام كتاب المخروطات"

مقدِّمة

١- ابن الهيثم وكتاب "المخروطات" لأبلونيوس

لنؤكـِّد أنَّ نظرية القطوع المخروطية لم تحتلّ قبل القرنين التاسع والعاشر الميلاديين مكاناً مركزياً إلى الحدّ الذي وصلت إليه خلال هذه الفترة. لا يتعلّق الأمر فقط بخواصّ هذه المنحنيات، بل أيضاً بقابلية تطبيقها على ميادين لم يتنبَّأ بها الرياضيّون الأوائل مثل أرشميدس وأبلونيوس نفسيهما. وهذا يعني أنَّ نظرية المخروطات لم تعد فقط أداة قويَّة بين أيدي الهندسيِّين، بل أصبحت، خلال هذين القرنين، تـُقدِّم للجبريين وسيلة لحلِّ معادلات الدرجة الثالثة[1]. لم يُخالف ابن الهيثم هذه القاعدة، فهو كهندسيّ يدرس الخواصّ الهندسية للقطوع المخروطية، وهذا ما فعله في مؤلّفه "في مساحة المجسَّم المكافئ". وهو كفيزيائي يهتمّ بالخواصّ الانكسارية لبعض هذه المنحنيات، وهذا ما فعله في مؤلّفه "في المرايا المُحرقة بالقطوع". وهو يستخدم، أيضاً، هذه المنحنيات في حلِّ مسائل الأعمال الهندسية... يكفي، باختصار، أن نستعرض أعمال ابن الهيثم لنتحقـَّق أنَّ القطوع المخروطية وخواصّها متواجِدة فيها من أوَّلها إلى آخرها. وهكذا نفهم، بدون عناء، سبب اهتمام ابن الهيثم بمؤلّف أبلونيوس، وخاصَّة أنَّ هذا الأخير كان الوحيد في الساحة، بعد ضياع كلّ أعمال سابقيه. لقد اطلع الرياضيّون العرب، بمن فيهم ابن الهيثم، على هذا المؤلّف ودرسوه واستشهدوا به أكثر من أيِّ مؤلّف يونانيّ آخر في الرياضيّات، باستثناء كتاب "الأصول" لأقليدس. لم يكن ابن الهيثم على معرفة دقيقة بكلّ تفاصيل كتاب

[1] انظر: رشدي راشد: "الجبر"، ضمن رشدي راشد: موسوعة تاريخ العلوم العربية (بيروت ١٩٩٧) الجزء الثاني، ص. ٤٦٣-٤٨٩.

"المخروطات" فحسب، بل كان ينسخه من وقت إلى آخر، كما تدلّ على ذلك المخطوطة التي نسخها بيده والتي وصلت إلينا بعد عشرة قرون[٢].

كان ابن الهيثم الرياضيُّ، والنسّاخُ عندما تتطلّب الظروف ذلك، يعرف تاريخ النصّ العربي لمؤلّف أبلونيوس. ولقد روى هذا التاريخ بنو موسى، الذين كانوا على رأس من قام بالبحث عن المخطوطات اليونانية وبترجمتها، في نصٍّ كان ابن الهيثم مُطّلعاً عليه اطّلاعاً جيداً، إذ إنـّه زاد عليه بعض التصحيحات[٣]. يقول بنو موسى إنـّهم حصلوا على نسخة أولى تتضمَّن المقالات السبع الأولى ولكنـّها كانت صعبة الفهم؛ ثمَّ وجد أحمد بن موسى، خلال إقامته في دمشق، نسخة أوطوقيوس المتضمِّنة للمقالات الأربع الأولى، وهي النسخة التي لا غنى عنها لفهم المجموعة[٤]. يُذكـِّر بنو موسى، كما سنرى لاحقاً، بأنـّهم لم يعثروا من بين المقالات الثماني التي تكلّم عليها أبلونيوس في صدر كتاب "المخروطات"، سوى على المقالات السبع الأولى، وبأنَّ المقالة الثامنة مفقودة. لقد دفع فقدانُ هذه المقالة ابنَ الهيثم إلى تصوُّر مشروعه: إعادة كتابة هذه المقالة المفقودة، على سبيل التخمين، "لإتمام" كتاب "المخروطات". يجب علينا، إذاً، أن نتفحَّص الآثار المُحْتَمَلة لهذه المقالة الثامنة، ثمَّ أن نتساءل على ما يُمكن أن يُفهَم من كلمة "إتمام". إنَّ من المُهِمِّ، فعلاً، هو أن نعرف إذا كان قد بقي أيُّ أثرٍ من هذه المقالة الثامنة قابلٍ لتوجيه بحث ابن الهيثم ، قبل أن نتفحَّصَ مغزى مشروعه.

٢ ــ المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات"

يُشير أبلونيوس مرّتين في كتاب "المخروطات" إلى هذه المقالة الثامنة الناقصة: المرَّة الأولى في صدر الكتاب حيث يشرح تركيب الكتاب، والمرَّة الثانية في المقالة السابعة[٥]. لم يساعدنا شُرّاح كتاب "المخروطات" في توضيح هذه المسألة: فشرح هيباثيا (*Hypatie*) مفقود وسيرينوس أنطينوي (*Sérénus d'Antinoë*) لا يُخبِرنا بشيء عن الموضوع، أمّا أوطوقيوس فهو كأبلونيوس لا يتحدَّث عن الموضوع. تبقى لدينا مُقدِّمات أبلونيوس لكتاب

---

[٢] انظر: أبلونيوس، "المخروطات"(نسخة مُصوَّرة عن مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٦٢ من قِبَل م. ناظم ترزيوغلو)، نشر مؤسَّسة البحث الرياضي، ٤ (اسطنبول ١٩٨١).
[٣] انظر: بنو موسى، "مقدِّمات كتاب المخروطات"، مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٢٣ظ - ٢٢٦ظ.
[٤] انظر ص.٥١-٥٣.
[٥] انظر ص.٥٥-٥٧.

"المخروطات" التي أوردها بابوس في "المجموعة الرياضية". ويجب أن نضيف إلى ما سبق إشارة النديم، كاتب السِّيَر في القرن العاشر، إلى "أربع قضايا" من المقالة الثامنة. سنتناول من جديد هذه القصّة، التي رُوِيت مرات عديدة، لكي نرى حقيقة الأمر.

يبدو بالفعل أنَّ المقالة الثامنة من "المخروطات" قد فُقِدَت من زمن بعيد، ولو أنَّ أحداً لا يستطيع تأكيد ذلك بدقَّة؛ ولقد حصل ذلك بدون أدنى شكٍّ منذ زمن بابوس، وربما كان ذلك قبل زمنه. أراد بابوس بالفعل أن يُثبِت مقدِّمات لإتمام ما عرضه أبلونيوس في "المخروطات"[٦]. فهو يُقدِّم بالتتابع إحدى عشرة مقدِّمة للمقالة الأولى، وثلاث عشرة مقدِّمة للمقالة الثانية، وثلاث عشرة مقدِّمة للمقالة الثالثة – ليس هناك أيَّة مقدّمة للمقالة الرابعة–، وستَّ مقدِّمات للمقالة الخامسة، وأخيراً إحدى عشرة مقدِّمة للمقالة السادسة. وهكذا يُميِّز بابوس ويعزل بوضوح، حتَّى المقالة السادسة، كلّ مجموعة من المقدِّمات، ويوضِّح انتماءها للمقالة المكرَّسة لها. ثمَّ يُنهي عرضه بالمقدِّمات المُخَصَّصة، بدون تمييز، للمقالتين السابعة والثامنة. هذا الخروج عن القياس غير مفهوم: لماذا جمع بين المقدِّمات الخاصَّة بالمقالتين الأخريَيْن من الكتاب، بعد أن حرص على فصل المقدِّمات الخاصَّة بكلِّ مقالة من المقالات الستَّ الأولى؟ يُمكن أن نقول إنَّ بابوس كان متعوِّداً قليلاً على هذا التصرُّف، إذ إنَّه جمع في كتابه "اللازمات" (*les Porismes*)، بين مقدِّمات لثلاث مقالات. ولكن هذا لا يتعلّق بنفس المنهج، إذ إنَّه بدأ في "المخروطات" بالتمييز بين المقدِّمات، بينما جمع بينها في كتاب "اللازمات". ولكنَّ هذا الخروج عن القياس لم يكن وحيداً، إذ كنّا نتوقَّع من بابوس أن يتكلّم بالجمع عند الإشارة إلى مقالتين، ولكنّه تكلّم بالمفرد؛ فهو يكتب: τοῦ ZH "مقدّمات ٧ وَ ٨". هل هذا حادث عرضي أم أنَّه دلالة على أنَّ النصَّ الذي كان بين يديه لا يُشير إلا إلى مقالة واحدة؟ ليس هناك في النصّ ما يوحي بجواب معقول عن هذا السؤال. كلُّ ما يمكن أن نقوله هو أنَّ النصّ يُثير مسألة المعرفة

[٦] حرَّر بابوس سبعين مُقدِّمة لمقالات "المخروطات" موجودة ضمن المقالة السابعة من "المجموعة الرياضية" [انظر هولتش، المجلّد الثاني، ص. ٦٣٦ وما يليها؛ انظر أيضاً (*Apollonius Pergaeus, éd. J.L. Heiberg, 2 vol. (Leipzig, 1891-1893 ; repr. Stuttgart, 1974*)، المجلّد الثاني ص. ١٤٣ وما يليها؛ أنظر كذلك: *La Collection mathématique*, traduit par P. Ver Eecke, 2 vol. (Paris, 1982)، المجلّد الثاني، ص. ٧١٨؛ انظر أيضاً: A. Jones, *Pappus of Alexandria*, Book 7 of the Collection ، ص. ٢٩٦ وما يليها؛]. هذه المقدِّمات كبيرة الأهمِّيَّة، بداهة، لكتابة تاريخ التقليد النصّي لمقالات "المخروطات" الأربع الأولى

[انظر: (M. Decorps-Foulquier, *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, ، (أطروحة جامعة لِيلّ ١٩٩٤) ص. ٥١ وما يليها، وهي منشورة تحت عنوان *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Perge* (باريس ٢٠٠٠)، ص. ٥٢-٥٩ وَ ٢٣٧-٢٦٥]. وهذه المقدِّمات مكرَّسة في أغلبيَّتها لسدِّ نقص ضمن برهان أبلونيوس، أي لتعويض قفزة في التحرير قام بها هذا الأخير عن قصد. ويستطيع القارئ، المطّلِع كما يجب على "كتاب الأصول"، أن يُعوِّض تماماً، وحده، هذه القفزة في البرهان.

المُمْكِنة لبابوس بالمقالة الثامنة من "المخروطات"؛ كما أنـــَّه لا يُمكن، كما يبدو، أن نجد حلاً لهذه المسألة عبر الاستعانة بتاريخ النصّ.

تبقى لدينا طريقة أخرى لتوضيح الأمور، وهي أن نقارن بين المقدِّمات وقضايا أبلونيوس الواردة في المقالة السابعة التي وصلت إلينا. ليست هذه الطريقة سهلة، كما يبدو لأوّل وهلة، وليست، من جهة أخرى، حاسمة. نحن نعلم استناداً إلى هايبرغ (*Heiberg*) أنَّ مُقدِّمات بابوس، لمقالات كتاب "المخروطات" الثلاث الأولى نفسها الموجودة باللغة اليونانية، ليست مفيدة أبداً لإعادة كتابة القضايا. وهذا الوضع لا يَخُصُّ فقط كتاب "المخروطات" بل إنـــَّه ناتِجٌ من أسلوب بابوس في التحرير. ولقد عانى ب. تانـــّيري (*P. Tannery*) صعوبة مُشابِهة في كتاب أبلونيوس "الأمكنة المُستوية" (*Lieux Plans*). أمّا الصعوبة الثانية، فهي ناتجة من فقدان المقالة السابعة في اللغة اليونانية، وهذا ما يحرمنا من استخدام وسائل دراسة النصوص وانتقالها. أما المقالة الثامنة فليس لها أثر في أيّة لغة، وهذا ما يجعل الوضعَ ملائماً لتوليد الأساطير. ولنبدأ الآن، بعد أن تنبَّهنا إلى هذه المشاكل، بتفحُّص هذه المقدِّمات لبابوس؛ لعلّنا نجد فيها الجواب عن معرفته الممكنة بالمقالة الثامنة.

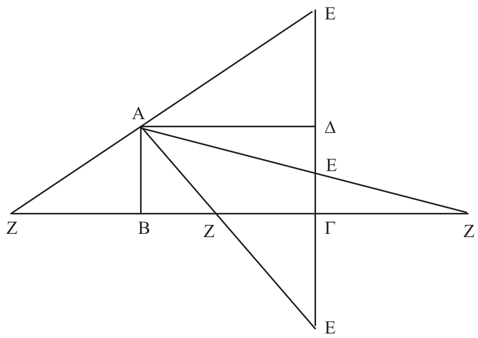
يتعلّق الأمر بمجموعة، من أربع عشرة مقدِّمة، مُخصَّصة للمقالتين السابعة والثامنة. لا يُشير بابوس، كما قلنا سابقاً، إلى الموضع الذي تبدأ فيه، ولا إلى الموضع الذي تنتهي فيه المقدِّمات الخاصّة بالمقالة السابعة. وهذا ما يجعلنا في جهل تامّ لعدد القضايا التي قد أمكنه الاطلاع عليها في المقالة الثامنة. يبقى علينا، إذاً، أن نعزل القضايا الخاصّة بالمقالة السابعة.

يدرس بابوس في المقدِّمتين الأوليَيْن، من هذه المجموعة التي تحتوي على أربع عشرة مُقدِّمة، حالتين خاصَّتين بقضيّة واحدة. قد تخصُّ هاتان المقدِّمتان، لأوّل وهلة، القضيّة الخامسة من المقالة السابعة من "المخروطات"؛ ولكنَّ التفحُّصَ الحذِرَ يُظهِر وضعاً أكثر تعقيداً. وذلك أنَّ هناك، في الواقع، حالة ثالثة، لم يُشِر إليها بابوس مطلقاً، تخصُّ

القضيَّة[٧] الخامسة من المقالة السابعة. كما أنـــَّنا، إذا طبَّقناها، نحصل على مبرهنة فيثاغوروس ونستنتج عندئذ النتيجة المطلوبة. تختلف الطريقة المتــَّبعة إذاً عن طريقة أبلونيوس. ولكن، فلنبدأ ببرهنة هذه الأقوال.

يُدخِل بابوس في المقدِّمتين مستطيلاً هو $AB\Gamma\Delta$ وخطّاً خارجاً من A، مارّاً داخل المستطيل في المقدِّمة الأولى، ومارّاً بكامله خارج المستطيل في المقدِّمة الثانية. يُبيِّن بابوس أنَّ :

$$AE.AZ = \Delta E.\ \Delta\Gamma + BZ.B\Gamma \qquad (١)$$



الشكل ١

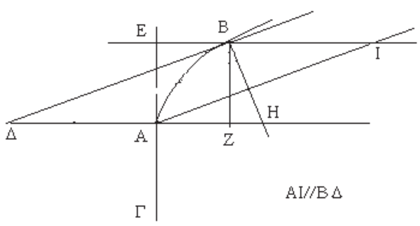
يُمكِن أن نُحدِّدَ وضعيّة الخطّ بنقطة تقاطعه E مع الخطّ $\Delta\Gamma$، ويُمكن أن نحصل على الحالات التالية للشكل:

١- E بين Δ وَ Γ؛ فتكون Z عندئذ بعد Γ على الخطّ $B\Gamma$.

٢- E بعد Γ ؛ فتكون Z عندئذ بين B وَ Γ ، وهذا ما يتوافق مع شكل المقدِّمة الأولى لبابوس.

---

[٧] تقول هذه القضيّة: فليكن $\mathcal{P}$ قطعاً مكافئاً محوره AH ورأسه A، وليكن BI قطراً من أقطاره وَ $c = A\Gamma$ ضلعه القائم للمحور، وليكن BZ عموديّاً على AH. فأقول إنَّ الضلع القائم للقطر $B\Gamma$ هو c_1، حيث إنّ $c_1 = A\Gamma + 4AZ$. انظر الشكل التالي:



٣- E بعد Δ ؛ فتكون Z عندئذ بعد B ، وهذا ما يتوافق مع شكل المقدِّمة الثانية لبابوس.

وهكذا يكون معنا، للخطّ الخارج من A، ثلاث حالات للشكل نقوم فيها بنفس الاستدلال ونحصل فيها على نفس النتيجة المُمَثـَّلة بالمعادلة (١).

الحالة الأولى للشكل- E بين Δ وَ Γ – غير موجودة في نصّ بابوس، بالرغم من أنـّها تتوافق مع شكل القضيّة الخامسة من المقالة السابعة لأبلونيوس حيث تكون E في وسط $\Gamma\Delta$. ولكنه من الممكن أن نعالج هذه القضيّة الخامسة باستخدام مقدِّمة بابوس، بطريقتين مُختلفتين بدون إدخال العمود BH الذي يُستخدَم في طريقة أبلونيوس. ولكنَّ الاستدلال يكون عندئذ مختلفاً عن استدلال أبلونيوس (انظر شكل القضيّة الخامسة من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات").

يُمكننا بالفعل أن نتناول:

ا) المستطيل $AEBZ$ وكذلك الخطّ $B\Delta$ المماسّ في النقطة B للقطع المكافئ والخارج من رأس المستطيل B.

ب) المستطيل $AEBZ$ وكذلك الخطّ AI الخارج من رأس المستطيل A والموازي للخطّ $B\Delta$. يكون الخطّ AI عندئذ الإحداثيّة الثانية (العمودية) للنقطة A بالنسبة إلى القطر BI، ويكون معنا $AI = B\Delta$ ؛ وتـُعطينا مقدِّمة بابوس:

ا) $E\Theta.EA + ZA.Z\Delta = B\Theta.B\Delta$ ، ب) $AT.AI = EB.EI + ZT.ZB$

ولكن، وفقاً للقضية ٣٥ من المقالة الأولى، تكون النقطة A في وسط $Z\Delta$؛ فتكون Θ أيضاً في وسط $B\Delta$ وَ T في وسط ZB. يتعلّق الأمر إذاً في ا) وفي ب) بحالة خاصَّة من مقدِّمة بابوس:

ا) $\Leftarrow B\Delta^2 = EA^2 + Z\Delta^2 \Leftarrow B\Delta^2 = BZ^2 + Z\Delta^2$

ب) $\Leftarrow AI^2 = EI^2 + ZB^2 \Leftarrow AI^2 = EI^2 + EA^2$ ؛

وهذا يرجع إلى تطبيق مبرهنة فيثاغوروس على المثلّث $B\Delta Z$ في الحالة ا) وعلى المثلّث AEI في الحالة ب)؛ وهذه النتائج يُمكن الحصول عليها بدون استخدام مُقدِّمة بابوس.

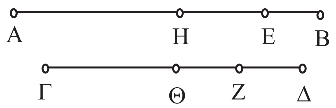
فإذا رمزنا فعلاً بـِ c_0 إلى الضلع القائم الخاصّ بالمحور AZ و بـِ c إلى الضلع القائم الخاصّ بالقطر IB ، يكون معنا:

$c.AZ = c . A\Delta = c. BI = AI^2 = B\Delta^2$، $c_0.AZ = EA^2 = BZ^2$، $4.AZ^2 = EI^2 = Z\Delta^2$؛

فنستنتج إذاً من ا) وَ ب) أنَّ: $4.AZ^2 + AZ . c_0 = c . AZ$، فيكون $4.AZ + c_0 = c$.

تـُـبيِّن هذه المناقشة، الطويلة قليلاً، أنَّ التوافق، بين المقدّمتين الأولــَيَيْن لبابوس والقضيّة الخامسة من المقالة السابعة، ضعيف إلى درجة بحيث لا يُمكن لأحدٍ أن يُحدِّد نصَّ القضية أو مُحتواها استناداً إلى المقدّمتين فقط، إذا لم يكن مُطَّلِعاً عليها سابقاً. إنَّ هذا الغموض يمنعنا من أن نقول، إذا التزمنا بالدقــَّة، إنَّ المقدِّمة هي مقدِّمة القضيَّة. كلُّ ما يُمكن قوله هو أنَّ بابوس استند إلى شكل القضيَّة الخامسة من المقالة السابعة أو على شكل مشابه له ليُبرهن علاقة متريّة عامَّة مُعادِلة لمبرهنة فيثاغوروس في حالة أبلونيوس.

تسمح المقدِّمة الثالثة – وتكون المقدِّمة الرابعة حالة خاصَّة لها– بإقامة البرهان الخاصّ بمجموع القطرين المزدوجين لقطع زائدٍ؛ وهذا هو غرض القضيَّة ٢٥ من المقالة السابعة. وإذا طبَّقنا فرضيّة المقدِّمة الثالثة على قطرين مزدوجين لقطع زائد، نحصل على الخاصَّة المُثْبَتة في القضيّة ١٣ من المقالة السابعة[٨]. فلنَتَبَنَّ إذاً هذه الفرضيَّة، فنحصل على نتيجة المقدِّمة الثالثة التي تعطينا نتيجة القضيَّة ٢٥. لم يُشِر أبلونيوس، من جهة أخرى، إلى الحالة الخاصَّة التي يُمكن أن نستخرجها من المقدِّمة الرابعة. لِنُبَسِّط قليلاً هذه الأقوال.



الشكل ٢

يفرض بابوس في المقدِّمة الثالثة أنَّ: $AB > \Delta\Gamma$ ، $AH = HB$، $\Gamma\Theta = \Theta\Delta$؛ ويأخذ $E \in [HB]$، $Z \in [\Theta\Delta]$ بحيث يكون $AE.EB = \Gamma Z.\Delta Z \Leftarrow AE > \Gamma Z$.

[٨] يقول أبلونيوس "كلُّ قطع زائد، فإنَّ فضل ما بين مربَّعي سهميه مساوٍ لفضل ما بين مربَّعيْ كلّ قطرين مزدوجين من أقطاره الباقية، أيّ قطرين كانا.

تدرس القضيَّة ٢٥ من المقالة السابعة مجموع قطرين مزدوجين لقطع زائدٍ.

لنأخذ زوجاً من قطرين مزدوجين: (d_1, d'_1) وَ (d_2, d'_2) ؛ نحن نعلم أنَّ $d_1 > d'_1$ وأنَّ $d_2 > d'_2$ أيضاً.

لنفرض أنَّ $d2 > d1 > d'_1$ ولنضع $d2 = HB = AH$ وَ $d'_2 = HE$، $d1 = \Theta\Delta = \Gamma\Theta$ وَ $d'_1 = \Theta Z$؛ فنحصل على :

$$AE.EB = \Gamma Z.Z\Delta \Leftrightarrow HA^2 - HE^2 = \Theta\Gamma^2 - \Theta Z^2 \Leftrightarrow d_2^2 - d_2'^2 = d_1^2 - d_1'^2$$

وهذا ما يتوافق مع نتيجة القضية ١٣ من المقالة السابعة. يكون معنا:

$$AE > \Gamma Z \Leftarrow AE.EB = \Gamma Z.\Delta Z$$،

ولكنَّ $d_2 + d'_2 = AE$ و $d_1 + d'_1 = \Gamma Z$ ، فيكون معنا إذاً: $d_1 + d'_1 > d_2 + d'_2$.

ليكن d'_0 وَ $d0$ محورَي القطع الزائد؛ يكون معنا $d1 > d0$ ، فيكون إذاً: $d1 + d'_1 > d0 + d'_0$،

فيكون بالتالي: $d_0 + d'_0 < d_1 + d'_1 < d_2 + d'_2$.

يفترض بابوس في المقدِّمة الرابعة أنَّ $AH = \Gamma\Theta$، فيكون معنا في هذه الحالة:

$$AE = \Gamma Z \Leftarrow AE.EB = \Gamma Z.Z\Delta$$.

يكون القطران، d_1 وَ d_2، في قطع زائد متساويين إذا كانا متناظرين بالنسبة إلى أحد المحورين، فيكون القطران المزدوجان معهما متناظرين أيضاً؛ فيكون معنا: $d'_2 = d'_1$، فينتج من ذلك أنَّ: $d_1 + d'_1 = d_2 + d'_2$.

يكون معنا: $AH = \Theta\Gamma \Leftarrow AE = \Gamma Z \Leftrightarrow d_1 = d_2 \Leftarrow d_1 + d'_1 = d_2 + d'_2$.

لم يُشِر أبلونيوس إلى هذه الحالة الخاصَّة.

ولنلاحظ أخيراً أنــَّـه لو كان معنا $d1 < d'_1$ لحصلنا أيضاً على $d2 < d'_2$. نستطيع في هذه الحالة أن نُطبِّقَ المقدِّمة الثالثة واضعين $d'_2 = HB = AH$ وَ $d2 = HE$ ، $= \Theta\Delta = \Gamma\Theta$ d'_1 وَ $d_1 = OZ$. فنحصل عندئذ على: $AE.EB = \Gamma Z.Z\Delta \Leftrightarrow d_2'^2 - d_2^2 = d_1'^2 - d_1^2$،

ويُمكن أن ننهي البرهان بنفس الطريقة.

وهكذا حدَّدنا الشروط التي تجعل المقدِّمتين الثالثة والرابعة مُقدِّمتين للقضيَّة ٢٥[٩] من المقالة السابعة من "المخروطات". الشرط الأوَّل هو استخدام القضيّة ١٣ من المقالة السابعة، وهذا ما لم يُشِرِ بابوس قطّ إليه. والشرطُ الثاني، إذا أردنا الكلام على توافق حقيقيّ بين المقدِّمات والقضايا، هو أن يوجَدَ نصّ لكتاب "المخروطات" حيث يكون أبلونيوس قد عالج فيه الحالة الخاصَّة بالمقدِّمة الرابعة، أي حالة التناظر بالنسبة إلى المحورين. ولكنَّ هذا النصَّ غير موجود، إلا إذا دخلنا ميدان التخمينات التي تفرض وجود نصٍّ، بين يديْ بابوس لكتاب "المخروطات"، مختلف عن النصّ الموجود لدينا. ولكن يبقى من المستحيل أن نبرهن أنَّ بابوس يستند بالفعل إلى قضيّة أبلونيوس، حتـــَّى لو كان احتمالُ ذلك غيرَ معدوم.

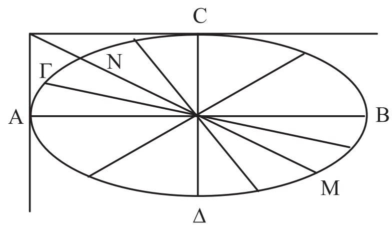
ونجد أنفسنا مع مقدِّمة بابوس الخامسة في وضع غامض مشابِه. يُمكن أن نستنتج أنَّ هذه المقدِّمة كانت مُخصَّصة للقضية ٢٧، من المقالة السابعة، المتعلّقة بالقطع الناقص. ولكنَّ أبلونيوس لا يُبرهن فيها شيئاً؛ فهو يكتب: "وقد تبيَّن أنَّ ذلك في القطع الناقص على ما قلنا في الشكل كــد من هذه المقالة"[١٠]، بفضل القضيَّة ٢٤ من المقالة السابعة. إذا سلّمنا، إذاً، بأنَّ المقدَّمة الخامسة مُخصَّصة لهذه القضيَّة، فإنـــَّه يتوجَّب علينا أن نُسلّم أيضاً أنَّ هذه القضيَّة نفسها تسمح باستخراج برهان لم يُعطِهِ أبلونيوس قطُّ.

يُمكننا، بالفعل، إعادة كتابة المقدَّمة الخامسة لبابوس. ليكن معنا أربعة خطوط أطوالها بالترتيب a، b ، c، d، مع: $a > b$، $d > c$ ، $a > c$ وَ $b > d$؛ فنحصل على: $a - c > b - d$.

لنتناول القضيَّة ٢٧ من المقالة السابعة. ليكن AB وَ CD محوريْ القطع الناقص، $AB = d_0$ ، $CD = d'_0$ مع $d_0 > d'_0$. ليكن NM القطر الذي يُساوي القطر المزدوج معه، وليكن $\Delta\Gamma$ قطراً اختيارياً. لنضع $d = \Delta\Gamma$؛ وليكن d' القطر المزدوج مع d.

[٩] "كلُّ قطع زائد، فإنَّ الخطَّ المساوي لسهميه أصغر من الخط المساوي لقطرين آخرين مزدوجين من أقطاره، أيّ قطرين كانا، والخطّ المساوي لما قرب من الأقطار المجانبة من السهم الأطول مع القطر المزدوج معه أصغر من الخط المساوي لما بعد من الأقطار المجانبة عن السهم الأطول مع القطر المزدوج معه.

[١٠] انظر: أبلونيوس، *Les Coniques d'Apollonius de Perge, trad. Ver Eecke* ، ص. ٥٨٨.



الشكل ٣

– إذا كان Γ على القوس $\widehat{AN}$، يكون معنا: $d_0 > d > d' > d'_0$.

تعطي المقدِّمة الخامسة: $d_0 - d'_0 > d - d'$.

– إذا كانت النقطة Γ على القوس $\widehat{NC}$، يكون معنا $d' > d$ ؛ فيكون إذاً: $d_0 > d' > d > d'_0$،

فتعطينا المقدِّمة الخامسة عندئذ: $d_0 - d'_0 > d' - d$.

– إذا كانت Γ في النقطة N، يكون معنا: $d = d'$، $d - d' = 0$. فتكون النتيجة العامة إذاً

$d_0 - d'_0 > |d - d'|$؛

يتعلّق الأمر ببرهان مستقلٍّ للقضيَّة ٢٤ من المقالة السابعة.

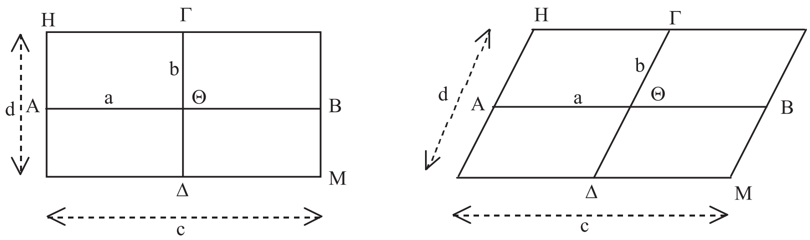
إنَّ القول بأنَّ المقدِّمة الخامسة هي مقدِّمة للقضيَّة ٢٧ من المقالة السابعة يفترِض إذاً أنَّ بابوس، لسبب غير معروف، لم يرَ أنَّ هذه القضيَّة بديهية استناداً إلى القضيَّة ٢٤ من المقالة السابعة، أو أنَّـه أراد ببساطة أن يستخرِج علاقة مترية، في وضع القضية ٢٧ من المقالة السابعة، مستقلّة عن هذه الأخيرة. ليس هناك أيَّة حُجَّة نصيّة لدعم إحدى هاتين الإمكانيتين، وهذا ما يجعلنا، على هذا النحو، أمام مُقدِّمة لا ضرورة لها، غير ذات أهمِّيَة وغير ذات موضوع.

المقدِّمة السادسة تُـعطي نتيجة خاصَّة بمستطيليْن متشابهيْن؛ وهي، أيضاً، غير ذات أهمِّيَّة. تقول هذه النتيجة: إذا كانت نسبة التشابه مساوية لـِ ٢، فإنَّ نسبة المساحتين مساوية لـِ ٤. يُدخِل بابوس أربعة خطوط أطوالها بالترتيب a، b، c وَ d ، بحيث يكون $2a = c$، $2b = d$ ، ويُبيِّن أنَّ $4\,a\,.\,b = c.\,d$.

لا يُبرهِن بابوس هذه النتيجة في الحالة البديهية لمتوازيَيْ الأضلاع ولا في الحالة العامَّة. ولكنَّـنا نلقى، في القضيَّة ٣١ التي يُمكن أن ندرس هذه المقدّمة استناداً إليها ،

حالة المستطيل المُحدَّد بواسطة مِحورَي القطع الناقص، وحالة متوازي الأضلاع المُحَدَّد بواسطة القطريْن المزدوجين. نورد فيما يلي نصَّ أبلونيوس:

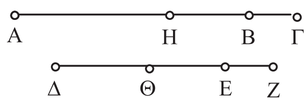
وأربعة أمثال سطح، ط ح ($H\Theta$)، الذي هو سطح ح م (MH)، مساوٍ لأربعة أمثال سطح ا ط في ط ح، ($A\Theta$ في $\Theta\Gamma$)، الذي هو مثل السطح القائم الزوايا الذي يحيط به سهما ا ب جـ د، (AB و $\Delta\Gamma$)[11].



الشكل ٤

لو كانت المقدِّمة السادسة مُخصَّصة، إذاً، للقضيّة ٣١ من المقالة السابعة، لأخطأت هدفها جزئيّاً.

تُعالج المُقدِّمات، ذات الأرقام ٧ و ٩ وَ ١١، قِسَماً متشابهة، وهو موضوع غير وارد في المقالة السابعة. والمقدِّمة التاسعة هي، فضلاً عن ذلك، حالة خاصَّة من المقدِّمة السابعة؛ والمقدِّمة الحادية عشرة هي عكس المقدِّمة التاسعة. والمقدِّمتان الثامنة والعاشرة مُدخَلتان، بدون سبب، على التوالي، بين السابعة والتاسعة وبين التاسعة والحادية عشرة؛ كما أنـهما تـؤدِّيان إلى خواصّ ليس لها أيَّة أهمِّيَّة. وهذا يعني أننا لا نرى أيّ استخدام مُحتمَل للمقدِّمتين الثامنة والعاشرة، كما لا نرى السبب الذي وُضِعَتا من أجله في موضعيهما. لنتناول مثالَ المقدِّمة السابعة.



الشكل ٥

[11] انظر: أبلونيوس، *Les Coniques d'Apollonius de Perge, trad. Ver Eecke*، ص. ٥٩٤.

لنفرض أنَّ: $\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{AB}{B\Gamma}$ وَ $\frac{\Delta E}{E\Theta}=\frac{AB}{BH}$؛

يكون معنا:

(١) $k=\frac{E\Theta}{BH}=\frac{EZ}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{AB}$ ؛

فتكون (A, H, B, Γ) وَ (Δ, Θ, E, Z) قسمتين متشابهتين. نستخرِج من (١):

(٢) $k=\frac{\Theta Z}{H\Gamma}=\frac{\Delta\Theta}{AH}$.

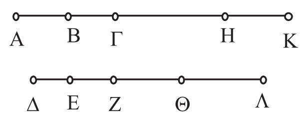
ولكن (١) $\Leftarrow$ $k^2=\frac{\Delta E.E\Theta}{AB.BH}$ وَ (٢) $\Leftarrow$ $k^2=\frac{\Delta\Theta.\Theta Z}{AH.H\Gamma}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{\Delta\Theta.\Theta Z}{AH.H\Gamma}=\frac{\Delta E.E\Theta}{AB.BH}$.

النقطة B هي منتصف الخطّ $A\Gamma$، في المقدِّمة التاسعة، والنقطة E هي منتصف $Z\Delta$، أيْ أنَّ $BA=B\Gamma$ وَ $EZ=\Delta E$؛ ويكون معنا بالإضافة إلى ذلك $\frac{B\Gamma}{BH}=\frac{EZ}{E\Theta}$. ونُبيِّن أنَّ: $\frac{HA.HB}{\Gamma B.\Gamma H}=\frac{\Theta\Delta.\Theta E}{ZE.Z\Theta}$.

وهكذا يتعلّق الأمر بحالة خاصَّة من المقدِّمة السابعة.

المقدِّمة الحادية عشرة هي المقدمة العكسية للمقدِّمة التاسعة؛ وهي تُكتَب على الشكل التالي: ($BA=B\Gamma$ وَ $EZ=\Delta E$ وَ $\frac{HA.HB}{\Gamma B.\Gamma H}=\frac{\Theta\Delta.\Theta E}{ZE.Z\Theta}$) $\Leftarrow$ $\frac{B\Gamma}{BH}=\frac{EZ}{E\Theta}$

$\Leftarrow$ $k=\frac{E\Theta}{BH}=\frac{EZ}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{AB}$



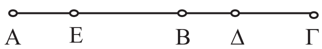
الشكل ٦

يُمكن، في المقدِّمة التاسعة أن نكتب المعادلة (١) الواردة في المقدِّمة السابعة، فيكون البرهان مباشراً. يتمُّ، في المقدِّمة ١١، إدخال نقطة K على الخطّ AB ونقطة L على الخطّ DE، بحيث تكون (A, B, Γ, K) وَ $(\Delta, Z, \Theta, \Lambda)$ قسمتين متشابهتين.

ونستنتج من ذلك أنَّ القسمتين (A, B, Γ, H) وَ (Δ, E, Z, Θ) متشابهتان أيضاً.

المقدِّمة الثامنة المُدخَلَة بين المقدِّمتين السابعة والتاسعة، تعني أنَّ $AB^2 + B\Gamma^2$ وَ $AB^2 - B\Gamma^2$ معلومتان، فيكون الخطّان AB وَ $B\Gamma$ معلومين.

المقدِّمة العاشرة، المُدخَلَة بين المقدِّمتين التاسعة والحادية عشرة، تُكتب كما يلي:
إذا كان $B\Gamma = AB$ وَ $BE > B\Delta$ ، يكون عندئذ $\frac{A\Delta.\Delta B}{B\Gamma.\Gamma\Delta} < \frac{\Gamma E.EB}{BA.AE}$.



الشكل ٧

ونحن لا نرى لماذا أدخِلَت المقدِّمتان الثامنة والعاشرة، اللتان تـؤدِّيان إلى نتائج بديهية، بين مقدِّمتين خاصَّتين بالقِسَم المتشابهة. فلنضع جانباً هاتين المقدِّمتين ولنتناول كلّ المقدِّمات ذات الأرقام: ٩، ١١، ١٢، ١٣وَ ١٤. نُلاحظ أنــَّه يُستخدَم فيها كلّها خطّان ووسطاهما – $A\Gamma$ ذو الوسط B وَ ΔZ ذو الوسط E– ونقطة H،على الخطّ $A\Gamma$، ونقطة Θ على الخطّ ΔZ. وتـُدرَس في المقدِّمتين التاسعة والحادية عشرة قِسَم متشابهة أي مجموعة من النسَب المتساوية. وتـُعالِج المقدِّمات ١٢، ١٣ وَ ١٤، في الفرضيّات والنتائج، نسباً غيرَ متساوية. وهكذا نجد استناداً إلى فرضيّات المقدِّمة التاسعة:

$ZE = E\Delta$ و $B\Gamma = AB$ ، $k = \frac{\Delta\Theta}{AH} = \frac{Z\Theta}{\Gamma H} = \frac{E\Theta}{BH} = \frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB}$.

(٥) (٤) (٣) (٢) (١)

١٢) إذا كان $ZE = E\Delta$ وَ $B\Gamma = AB$ وَ $\frac{Z\Theta}{\Gamma H} > \frac{EZ}{B\Gamma}$، يكون $\frac{\Delta\Theta}{AH} < \frac{EZ}{B\Gamma}$ عندما تكون H بين B وَ Γ وَ Θ بين E وَ Z، أو $\frac{\Delta\Theta}{AH} > \frac{EZ}{B\Gamma}$ عندما تكون H ما بعد Γ وَ Θ ما بعد Z.

وهذا يعني، مع فرضيّات المقدِّمة التاسعة ومع الفرضيّة (٢) < (٤)، أنَّ (٥) < (٢) أو (٥) > (٢)، وِفقاً لموضع H.

١٣) إذا كان $ZE = E\Delta$ وَ $AB = B\Gamma$ وَ $\frac{\Theta E}{HB} < \frac{\Delta\Theta}{AH}$، يكون $\frac{EZ}{B\Gamma} < \frac{Z\Theta}{\Gamma H}$ عندما تكون H ما بعد Γ وَ Θ ما بعد Z، أو $\frac{EZ}{B\Gamma} > \frac{\Delta\Theta}{AH}$ عندما تكون H بعد Γ وَ Θ بعد Z.

وهذا يعني، مع فرضيّات المقدِّمة التاسعة ومع الفرضيّة (٥) > (٣)، أنَّ (٢) > (٤).

١٤) إذا كانت معنا هذه الفرضيّات نفسها، يكون $\frac{E\Theta}{BH} < \frac{Z\Theta}{\Gamma H}$ عندما تكون H بين B وَ Γ وَ Θ بين E وَ Z.

وهكذا انتهينا من تلخيص المقدّمات الثماني التي من بينها ثلاث مقدِّمات تـُعالِج القِسَم المتشابهة، ومقدِّمتان بديهيَّتان، وثلاث مقدِّمات تعالج القِسَم مع نسب غير متساوية. وتستخدِم خمس من هذه المقدِّمات خطّين مع وسطيهما. ونحن نعرف أنَّ هذين الخطَّين يخصَّان قطري قطع مخروطيّ عندما يكون لهما وسط مشترَك. ولكن لا يوجَد في المقالة السابعة من كتاب "المخروطات" ، على ما يبدو – إذا لم نُخطئ في حُكمنا – أيَّة قضيّة يُمكن أن نطبِّق فيها إحدى هذه المقدِّمات. يُمكن أن نجِد لهذه المقدِّمات تطبيقاً، إذا أخذنا مثلاً، خطوطَ التماس ونقاطَ تقاطعها مع أقطار لا تمرُّ بنقطة التماس مع القطع المخروطي. ولكنَّ هذا لا يذهب بنا بعيداً في حلِّ المسألة.

لنــُلخــِّص ما تقدَّم: يُبيِّن لنا تفحُّص المقدِّمات الستّ الأولى أنــَّه إذا أمكن رؤية توافق – بين السطور على أكثر تقدير – لها مع بعض قضايا المقالة السابعة من كتاب "المخروطات"، فإنَّ هذا التوافق ضعيف وهشٌّ : إنَّ حالة القضية الخامسة من المقالة السابعة، نفسها، لم ترد في المقدِّمتين الأولَيَيْن؛ وحتَّى إذا استغنينا عنها، فإنَّ تطبيق المقدِّمة الأولى كما رأينا يُعطي مبرهنة فيثاغوروس! والمقدِّمة الثالثة لا تــُساعِد في برهنة القضيَّة ٢٥ من المقالة السابعة إلا باستخدام القضية ١٣، وهذا ما لم تتمّ الإشارة إليه؛ أمّا المقدِّمة الخامسة فهي ملائمة لبرهنة القضيّة ٢٧ من المقالة السابعة، مع العلم بأنَّ أبلونيوس لم يُعطِ هذا البرهان؛ والمقدِّمة السادسة لا تكفي لبرهنة القضيّة ٣١ من المقالة السابعة لأنــَّها لا تــُعالِج حالة متوازي الأضلاع. لا يبدو، حسب ما رأينا أعلاه، أنَّ

هناك، ابتداء من المقدِّمة السابعة، أيَّ توافق حتـــّى بين السطور مع قضايا المقالة السابعة. لا يُمكِن لهذه المقدِّمات أن تكون قد ابتـــُكِرت كمراحل في برهان أبلونيوس، ولكنها تبدو كشروح أو كإضافات مستَخرَجة من نظرية المخروطات بحيث لا تحتفظ إلا بالعلاقات المترية. ولا يُمكن لنا، استناداً إلى هذه الدلائل، أن نستنتج شيئاً حول معرفة بابوس المُمكنة بالمقالة الثامنة من "المخروطات".

قد يكون من المغامرة على أقلّ تقدير، في ظلّ هذا الغموض الذي يصل إلى حدّ الشكّ، أن نـــُصدِر حكماً حاسماً حول التوافق بين المقدِّمات والقضايا. لا شيء يُبرِّر، والحالة هذه، أن نرسم خطّاً فاصلاً بين المقدِّمات يمرُّ بين المقدِّمتين السادسة والسابعة، للتمييز بين ما هو مُخصَّص لكل من المقالتين الأخيرتين لكتاب " المخروطات". إنَّ إعادة إنشاء المقالة المفقودة من قِبَل هالي أ. (*Halley E.*) سنة ١٧١٠ لا يُمكِن إلا أنَّ تكون تخميناً خالصاً ومجرَّدة من أيّ اعتبار تاريخيّ. وتـــُضاف إلى الحجج السابقة حججٌ أخرى تدفعنا إلى مضاعفة الحذر.

الحجّة الأولى تخصُّ نسخة "المخروطات" التي عرفها بابوس. يكتب هذا الأخير:

"تتضمَّن المقالات الثماني لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، أربع مئة وسبعة وثمانين مبرهنة وشكلاً وسبعين مقدِّمة"[١٢].

وإذا حسبنا عدد قضايا المقالات السبع الموجودة لدينا وفقاً لنسخة أوطوقيوس المتمَّمة بالترجمة العربية، نجد فرقاً يُقدَّر بمائة قضيَّة. فلو كان بابوس مطلعاً على المقالة الثامنة من "المخروطات" ولو كان هذا الحساب صحيحاً، مع بقاء الشروط الأخرى بدون تغيير، لتضمَّنت المقالة الثامنة مائة قضيَّة. وهذا ما قد يُثير الدهشة، إذ إنَّ أبلونيوس لم يتجاوز في المقالات الأخرى – بما فيها المقالة الخامسة التي هي الأكبر حجماً إلى حدٍّ بعيد – ٧٨ قضيَّة. كان يُمكن لبابوس أو لشارحٍ آخر أن يُلاحظ على الأقلّ هذه الغَرابة؛ ولكنَّ هذا لم

[١٢] انظر: بابوس، المجموعة الرياضية، المقالة السابعة، نشرة هولتش (*Hultsch*)، المجلّد الثاني، ص. ٦٨٢، س. ٢١-٢٣(ترجمة ب. فير إيك (*P. Ver Eecke*)، المجلّد الثاني، ص. ٥١٢):

Ἔχει δὲ τὰ η´ βιβλία τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα, ἤτοι διαγράμματα υπζ´, λήμματα δὲ ἤτοι λαμβανόμενά ἐστιν εἰς αὐτὰ ο´.

يحدث. يُمكِن أن نعطي عدة تفسيرات لورود هذا العدد: خطأ من النسّاخ، نصّ مدسوس على قضايا أبلونيوس ليصبح عددها مساوياً للعدد المذكور، نسخة مُختلفة عن النسخة التي وصلت إلينا... أمّا المقدّمات السبعون فيمكن أن تكون المقدِّمات الواردة في نسخة "المخروطات" التي كانت بين يدي بابوس أو المقدِّمات الاثنتين والسبعين الموجودة في "المجموعة الرياضية" التي ألّفها بابوس.

والحجَّة الثانية تـُرجعنا إلى طبيعة هذه المقدِّمات. لم نفهم بما فيه الكفاية المغزى الخاصّ لمقدِّمات بابوس المكرَّسة لمقالات كتاب "المخروطات". إنـَّها ليست مقدِّمات مُبتـَكَرة كمراحل مُهملَة من قِبَل أبلونيوس، بل كنوع من الشروح المضافة على النصّ. يُقدِّم بابوس في أغلَب المُقدِّمات شروحاً مُستخرَجة من نظرية المخروطات بحيث لا تحتفظ إلا بالعلاقات المترية. يتعلّق الأمر إذاً بشروح لعلاقات واردة ضمن براهين أبلونيوس وبشروح لخواصّ معزولة مكرَّسة في أغلب الأحيان لتأكيد خاصة مترية. وهكذا لم يبق شيء تقريباً من خواصّ القطوع المخروطية. وقد يكون هذا السببَ الرئيسيَّ للصعوبة التي نلقاها عندما نريد أن نُثبت بعض التوافق بين مقدِّمات بابوس وقضايا أبلونيوس.

والحجَّة الثالثة تـُرجِعنا إلى مُحتوى المقدّمتين، السابعة والرابعة عشرة. ليس للمقدّمتين الثامنة والعاشرة أية أهمِّيَّة فحسب، بل إنـَّهما لا تقدّمان أيَّة وسيلة لفهم دورهما أو سبب وضعهما من هذه الجهة من الخطّ الفاصل المزعوم. فالمقدِّمة الثامنة، على سبيل المثال، تـُخبرنا أنـَّه إذا كان معنا مقداران a وَ b وإذا كان $a^2 + b^2$ وَ $a^2 - b^2$ معلومين، يكون عندئذ a وَ b معلومين. والمقدِّمة العاشرة، هي أيضاً، ليست ذات قيمة. لماذا وُضعت المقدِّمة الثامنة بين المقدِّمة السابعة والمقدِّمة التاسعة التي هي حالة خاصَّة من المقدِّمة السابعة؟ كما لا نرى لماذا وُضِعت المقدِّمة العاشرة، التي ليست ذات قيمة، بين المقدِّمة التاسعة والمقدِّمة الحادية عشرة التي هي المقدِّمة العكسية للمقدِّمة التاسعة.

ويجب أن نؤكدِّ، بالإضافة إلى ذلك، أنَّ المقدِّمات السابعة والتاسعة والحادية عشرة تتوافق، بدون أدنى شكٍّ، مع القضايا التي تعالج قِسَماً متشابهة وأنَّ مجموعة المقدِّمات

ذات الأرقام ٧، ٩، ١١، ١٢، ١٣، وَ ١٤ يُمكن أن تــُستَخدَم في بعض الحالات التي يُدرَس فيها قطران لقطع مخروطيّ.

مهما كانت الطريقة التي نتفحَّص بها شهادة بابوس، لا يُمكننا بشكل معقول، أي باحتمال كافٍ، أن نستخرِج منها معلومة مفيدة حول حالة كتاب "المخروطات" أو حول معرفة بابوس بالمقالة الثامنة؛ حتـــّى أنـــَّه ليس هناك ما يجعلنا نؤكِّد أنَّ بابوس كان مطَّلِعاً على هذه المقالة بكاملها. فهل كان حقـــّاً على علم بها؟ أم كان مطَّلِعاً فقط على القضايا التي تــُعالِج القِسَم المتشابهة؟ نحن نحتفظ، في أحسن الحالات، بهذا التخمين الأخير، بانتظار معلومات أوسع حول الموضوع. ونحن لا نأمل بالحصول على هذه المعلومات من شرح هيباثيا (*Hypatie*) المفقود ولا من كتاب سيرينوس أنطينوي (*Sérénus d'Antinoë*) ولا من أوطوقيوس نفسه. كلُّ شيء يوحي، مع الأسف، بأنَّ أهمَّ قسم من المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات" قد فــُقِد خلال القرون التي تفصل بين مؤلّفها وبين بابوس. ويأتي التقليد العربي لكتاب "المخروطات" ليؤكـــِّد مرَّة أخرى هذه النتيجة.

إنَّ دور بني موسى، الإخوان الثلاثة، في البحث عن المخطوطات اليونانية وفي ترجمتها، معروفٌ جيِّداً. ولقد أوضِحَ هذا الدور بالإسهام الرياضيّ للحسن، الأخ الأصغر، هذا الإسهام الذي أصبح اليوم معروفاً أكثر مما كان في الماضي[١٣]. لقد كان لدى بني موسى، بالإضافة إلى نسخة أوطوقيوس للمقالات الأربع الأولى، نسخة أخرى تتضمَّن المقالات السبع الأولى من كتاب "المخروطات". كانوا إذاً على اطلاع على نسخة، منقولة قبل القرن التاسع الميلاديّ، من المقالات السبع الأولى من كتاب "المخروطات". وهذا، فيما يلي، ما كتبوه في رسالة على شكل مقدّمة لقراءة "المخروطات":

"وكان قد وقع إلينا سبع مقالات من الثماني المقالات التي وضعها أبلونيوس"[١٤].

ولقد أكـــَّد غياب المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات" النديم، كاتب السِّيَر في القرن العاشر؛ فهو يكتب:

[١٣] انظر: المجلّد الأوّل من هذه الموسوعة (بيروت ٢٠١١).
[١٤] انظر : مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، ورقة ٢٢٣ظ.

وقال بنو موسى: إنَّ الكتاب ثمان مقالات والموجود منه سبع وبعض الثامنة. وترجم الأربع المقالات الأولى بين يدي أحمد بن موسى، هلال بن أبي هلال الحمصي، والثلاث الأواخر ثابت بن قرّة الحرّاني والذي يصاب من المقالة الثامنة أربعة أشكال[١٥].

لا يوردِ النديم، بالطبع، كلام بني موسى حرفيّاً. وهؤلاء لا يُشيرون، ضمن نصوصهم الموجودة اليوم، إلى القضايا الأربع من المقالة الثامنة. ولكنَّ هذا العدد دقيق بشكل كافٍ، وهذه الشهادة تحوي، من العناصر القابلة للتحقيق، ما يكفي لعدم إهمالها. لا يتحدَّث بنو موسى، بالفعل، إلا عن المقالات السبع. وهكذا تمكــَّن أحمد بن موسى من الحصول على نسخة أوطوقيوس للمقالات الأربع الأولى، وكما كتبوا ذلك بأنفسهم[١٦]،

"فأمكنه بذلك فهم الثلاث المقالات الباقية من السبع المقالات"،

أو أيضاً:

"وكان المتولّي لترجمة الثلاث المقالات الباقية ثابت بن قرة الحرّاني المهندس".

وهكذا لم يتكلّم بنو موسى إلا عن المقالات السبع الأولى وليس هناك أثر عندهم لهذه الأشكال الأربعة من المقالة الثامنة. فمن أيّ مصدر استقى النديم هذا الخبر حول هذه القضايا الأربع من المقالة الثامنة؟ إنـــَّه لم يكن مطَّلعاً مباشرة على التقليد اليوناني، فلذلك كان مستنداً إلى نصّ عربي؛ وقد يكون هذا النصّ مترجَماً من اليونانية. ولكن ليس لنا أيَّة فكرة عن هذا المصدر الذي لا شيء يؤكــِّد وجوده.

إنَّ كتــَّاب السِّيَر، وكذلك الرياضيين الذين خلفوا النديم، لم يضيفوا شيئاً مُهمَّاً على ما قاله، باستثناء بعض الأصداء التي تُعبِّر عن الاهتمام الذي أثارته المقالة المفقودة. فالقفطي ينقل ما قاله النديم؛ ولكن يظهر من روايته أنَّ العلماء في نهاية القرن الثاني عشر وبداية القرن الثالث عشر، كانوا لا يزالون يبحثون عن هذه المقالة الثامنة:

"ولما أخرجت الكتب من بلاد الروم إلى المأمون، أخرِج من هذا الكتاب الجزء الأوّل لا غير يشتمل على سبع مقالات. ولمّا ترجِمَ الكتاب، دلّت مقدّمته على أنـــَّه ثماني مقالات، وأنَّ المقالة الثامنة تشتمل على معاني المقالات السبع وزيادة واشترط فيها<أبلونيوس> شروطاً مفيدة وفوائد يُرْغَب فيها. وإلى يومنا هذا يبحث أهل هذا الشأن عن هذه المقالة فلا يطّلعون لها على خبر "[١٧]

[١٥] انظر: النديم، كتاب الفهرست، نشرة رضا تجدُّد(طهران ١٩٧١)، ص. ٣٢٦.
[١٦] انظر : مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، ورقة ٢٢٤و.
[١٧] انظر: القفطي، تاريخ الحكماء، نشرة ج. ليبَّرت (ليبزغ، ١٩٠٣)، ص. ٦١.

لا يُضيف كتــَّاب السِّيَر القدامى الآخرون شيئاً مهمَّاً على هذه الروايات. فهم يُعيدون أقوال بني موسى، وهي أنَّ المقالات السبع قد نــُقِلَت وتــُرجِمت إلى العربية.

لم يكن بين أيدي شُرَّاح كتاب "المخروطات" سوى المقالات السبع، وهم لا يُقدِّمون أيَّة معلومة عن المقالة الثامنة. وهذه هي حال نصير الدين الطوسي[١٨]والأصفهاني[١٩] والشيرازي[٢٠] واليزدي[٢١]. أمَّا المغربي، فهو الوحيد الذي يقول بخصوص المقالة الثامنة:

أقول: أمَّا هذه المقالة فغير موجودة، بل وُجِد أشكالها بلا مصادرات، ولم تعلم التراجمة على ماذا تدلُّ من المسائل، فأهملوها، وبقي من الكتاب سبع مقالات[٢٢].

إنــَّه من الواضح أنَّ المغربي لا يُقدِّم أيَّة معلومة قابلة للتحقيق باستثناء تلك القائلة بأنَّ المقالة الثامنة لم تترجَم إلى العربية. إنــَّه يكتفي بتقديم تخمين لتبرير غياب هذه المقالة.

يُمكننا إذاً أن نؤكــِّد، بدون خشية من زلل، أنَّ أحداً من الرياضيِّين منذ القرن التاسع للميلاد لم يذكــُر أيَّة قضيَّة من المقالة الثامنة، سواء أكان من شُرَّاح أو من قــُرّاء كتاب "المخروطات"، مثل ابن الهيثم أو ابن أبي جرادة. لم يُشر إلى هذه "الأشكال الأربعة" سوى النديم فقط. فهل روى ذلك عن مصدر منقول إلى العربية؟ يبدو، إذا أخذنا بعين الاعتبار كلَّ ما لدينا بالإضافة إلى التقليدين اليوناني والعربي، أنــَّه قد بقيت عدَّة قضايا(أشكال)، من المقالة الثامنة المفقودة، كان بابوس مطّلِعاً عليها بوجه الاحتمال، كما كان صداها قد وصل بطريقة أو بأخرى إلى العربية. إنَّ العدد الصغير لهذه القضايا – الأربع وفقاً لابن النديم – يُفسِّر وجود الاختلافات التي تــُميِّز أهم قسم من تاريخ هذه المقالة. والشيء الوحيد المؤكــَّد، كما قلنا سابقاً، هو أنَّ المقالة الثامنة قد فــُقدت، بكاملها أو بأكبر قسم منها، خلال القرون التي تفصل بابوس عن أبلونيوس.

---

[١٨] انظر : تحرير كتاب المخروطات، في المخطوطتين:
MS Dublin, Chester Beatty 3076; Londres, India Office 924.

[١٩] انظر: تلخيص المخروطات، مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٢٤.

[٢٠] انظر: أبو الحُسين عبد الملك بن محمّد الشيرازي، كتاب تصفـُّح المخروطات، مخطوطة إسطنبول، أحمد ٣، ٣٤٦٣؛ جار الله ١٥٠٧؛ يني جمي (*Yeni Cami 803*) ٨٠٣.

[٢١] انظر المخطوطة: *MS Edinburgh, Or. 28*.

[٢٢] انظر: ابن أبي الشكر المغربي، شرح كتاب أبلونيوس في المخروطات، مخطوطة طهران، سبهسلر (*Sepahsalar*) ٥٥٦، ورقة ٢ظ.

ولكن يجب أيضاً أن نستوضح الأمور حول المحتوى المحتمَل لهذه المقالة الثامنة. نحن نقتصر، مرَّة أخرى، على عدَّة تخمينات. والتخمين الذي لقي قبولاً من أكثر المؤرِّخين هو الذي قدَّمه ت. هيث (*Th. Heath*) :

إنَّ من المحتمَل بشكلٍ كافٍ أن تكون هذه المقالة حاوية على عدد من المسائل التي تهدف إلى إيجاد أقطار مزدوجة لقطع مخروطيّ على الشكل الذي حاول به هالّي أ.(*Halley E.*) إعادة كتابة هذه المقالة[٢٣].

لقد دعم هذا التخمينَ، نفسَه، مؤرِّخون بارزون، مثل ج. لوريا (*G. Loria*) وَ هــ. ج. زويتن (*H.G. Zeuthen*)؛ غير أنــَّه لا يُشكِّل التخمين الوحيد الذي يُمكِن تصورُّه. ويحُقّ لنا أن ندافع عن رأي آخر مُختَلِف. لِنــُذكــِّر أوّلاً أنَّ بابوس، في المقالة الرابعة من "المجموعة الرياضية" يُشير، كما يبدو، إلى أنَّ مسألة تثليث الزاوية التي طُرِحت في القرن الرابع قبل الميلاد لم تجد حلاً في أوّل الأمر. فهو يكتب:

إنَّ الهندسيّين الأوَل لم يكونوا قادرين على حلِّ المسألة، الخاصَّة بالزاوية، والمشار إليها من قبل، بواسطة المستويات مع أن طبيعتها تتعلّق بالمجسَّمات؛ وذلك لأنَّ القطوع المخروطية لم تكن بعدُ مألوفة لديهم؛ ولهذا السبب توقــَّفوا ولم يتقدَّموا. ولكنــَّهم قاموا بتثليث الزاوية لاحقاً بعد أن استخدموا لأجل ذلك الميل (*neusis*) الذي عرضناه أعلاه[٢٤].

يُمكن، من وجهة النظر هذه، أن نتصورَّ أنَّ هدف المقالة الثامنة هو حلّ لمسائل مجسَّمة كانت تُحلّ بالميل (*neusis*) بواسطة القطوع المخروطية، كما فعل بابوس، بالتحديد، في المقالة الرابعة من "المجموعة الرياضية". فتكون عندئذ مقالة "الميول" (*les neuseis*)، المنسوبة إلى أبلونيوس، تكملة لكتاب "المخروطات" لا يُحتفــَظ فيها إلا بمسائل الهندسة المستوية. يُمكِن، وفقاً لهذا التأويل، أن نفهم إعادة كتابة ابن الهيثم للمقالة الثامنة.

ليس لدينا ، في الوضع الحالي لمعارفنا، أيَّة حجّة لدعم أحد هذين التخمينين على حساب الآخر. إنَّ نُدرة المعلومات حول الموضوع لا يُمكن إلا أن تفسح المجال لكل المعتقدات. ولقد تصوَّر ابن الهيثم، على كلّ حال وفقاً لهذه الأوضاع واستناداً إلى هذه الفرضية، مشروع "تمام المخروطات". ولكن ماذا يجب أن نفهم من كلمة "تمام"؟

---

٢٣ انظر: Th. Heath, *A History of Greek Mathematics* ، الجزء الثاني، ص. ١٧٥

٢٤ انظر: Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, trad. Ver Eecke ، المجلد الأول، ص. ٢٠٩

٣- "في تمام كتاب المخروطات": هدف المشروع

يجب أن نــُذكِّر بأنَّ "في تمام كتاب المخروطات" لا يُشكِّل شرحاً لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، مهما كان المعنى الذي نريد إعطاءه لكلمة شرح. يكفي، لكي نقتنع بذلك، أن نُقارن كتاب ابن الهيثم هذا بالشروح اليونانية والعربية لكتاب "المخروطات" – أو ببعض مقالات هذا الكتاب – أي شروح أوطوقيوس والطوسي والمغربي والشيرازي والأصفهاني، الخ. وهل يُمكن، من جهة أخرى، أن يكون غير ذلك؟ يُعالج ابن الهيثم في كتاب "في تمام كتاب المخروطات" ، خلافاً للشروح، موضوع كتاب لم يقرأه قطّ، أي أنــَّه لم يكن هناك شيء للشرح، بسبب فقدان النصّ. يندرِج كتاب "في تمام كتاب المخروطات" إذاً ضمن نوع من الكتابة لا علاقة له بالشرح، وهو إعادة كتابة نصّ مفقود. ونحن، أخيراً، لسنا على علم بأيَّة محاولة يونانية أو عربية قبل القرن الحادي عشر لإعادة كتابة هذا الكتاب المفقود. وهكذا نرى إذاً بروز نوع من الكتابة، وهو صنف جديد من التحرير الرياضي يجب علينا وصفه.

كان ابن الهيثم يجهل كلَّ شيء تقريباً ، عن الكتاب الذي أراد إعادة كتابته، ما عدا بعض الإشارات المختصرة التي أوردها أبلونيوس. فنحن نقرأ باليونانية، بالفعل في صدر كتاب "المخروطات"، أن المقالة الثامنة تعالج

" τὸ δὲ προβλημάτων χωνιχων διωρισμένων" (نشرة هايبرغ ص.٤)،

وهذا ما تــُرجِم إلى العربية بعبارة "المسائل التي تقع في المخروطات".

إنــَّه من الواضح أنَّ المُترجِم قد فسَّر الفعل اليوناني: διορίζειν بالفعل "وقع". وأقلُّ ما يقال هو أنَّ هذا التفسير مدهِشٌ، لأنــَّه صدر عن شخص مثل هلال بن أبي هلال الحمصي أو مثل إسحاق بن حُنَين؛ إذ إنَّ معرفتهما الجيِّدة بالعربية وباليونانية تؤهِّلهما لتفسير أدقّ لهذا الفعل. يجب أن نُذكــِّر بأنَّ من معاني الفعل "وَقَعَ" نجد "حدث بشكل

أكيد"[٢٥]. والمعنى الثاني لفعل "وقع" هو "حدَّد وأثبت"، كما هي الحال في العبارة "وقع الحُكم"[٢٦]. وهكذا نلقى، في كلتا الحالتين، معنى الحدوث الأكيد والتحديد والإثبات. أما المعنى الأوَّل للفعل اليوناني:διορίζειν ، في استعمالاته المادية والمجرَّدة، فهو "حدَّد" أو "وضَعَ الحدود". أمّا معناه الجدليّ المنطقي فهو "عَرَّف" أو "حدَّد"؛ ولقد انتشر هذا المعنى كثيراً بدءاً من أرسطو ولم يُغَيَّب استعماله بالمعنى الآخر الرياضي المعروف وهو "بَحَثَ ووَصَفَ بمختلف الطرق كيف يُمكن حل مسألة ما"[٢٧]. وهكذا نجد أن المترجِم العربي قد اختار المعنى الجدلي المنطقي.

ونجد الإشارة الثانية إلى المقالة الثامنة في صدر المقالة السابعة. يُشير فيها أبلونيوس، أوَّلاً، إلى بحوثه ويكتب:

"وفي هذه المقالة أشياء كثيرة غريبة حسنة في أمر الأقطار والأشكال التي تعمل عليها مفصَّلة".

ثمَّ يُتابع قائلاً:

"وجميع ذلك عظيم المنفعة في أجناس كثيرة من المسائل، والحاجة إليها شديدة فيما يقع من المسائل في قطوع المخروطات التي ذكرنا مما يجري ذكره وبيانه في المقالة ح من هذا الكتاب"[٢٨].

يكون لدينا، هنا أيضاً، إمكانيتان حسب مطابقة معنى الفعل "وقع"، أو عدم مطابقته، لمعنى الفعل اليوناني، كما حصل سابقاً. ولكنَّ الفرضية الثانية هي أكثر واقعيَّة، وفقاً لطريقة الترجمة.

لنعترف بأنَّ هذه المعلومات قليلة إلى درجة لا تسمح بأيَّة إعادة كتابة للمقالة المفقودة. لم يكن لدى ابن الهيثم أيّ أثر أو بقيّة للقيام بعمل مؤرِّخ أو عالم آثار. ويبدو من جهة أخرى أنَّ ابن الهيثم كان يجهل كل شيء عن القضايا الأربع التي أشار إليها النديم. فلا يُمكننا إذاً تجاهل السؤال التالي: ما معنى، والحالة هذه، إعادة كتابة نصٍّ ريّاضيٍّ مع أنَّ كلَّ شيء منه مجهول، بالإضافة إلى أنــَّه قد حُرِّر قبل اثني عشر قرناً؟ يبدو هذا

[٢٥] هذا المعنى وارد في الآية القرآنية: ﴿إنَّ عذاب ربِّك لواقع﴾، الطور: ٧.

[٢٦] هذا المعنى وارد في الآية القرآنية: ﴿فوقعَ الحقُّ وبَطَلَ ما كانوا يعملون﴾، الأعراف: ١١٨.

[٢٧] انظر: ش. مغلِر ص. ١٤١:
Ch. Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Études et commentaires*, XXVIII (Paris, 1958).

[٢٨] انظر مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٦٢، ورقة ٢٦٨ و.

المشروعُ، لأوَّل وهلة على الأقلّ، غيرَ مُجدٍ في البحث التاريخي خاصَّة. ولكنَّ ابن الهيثم، بالرغم من ذلك، حاول القيام به. ولم يكفّ هذا المشروع عن إغراء خلفاء ابن الهيثم الرياضيين وعن حفز تخيُّلهم ونشاطهم الخلاق أحياناً. فلنتذكـَّر موروليكو (*Maurolico*) وكتاب "المخروطات"، وكذلك فرما (*Fermat*) وَ"الأمكنة المستوية" لأبلونيوس، وألبير جيرارد (*Albert Girard*) وَ و"لازمات" (*Porismes*) أقليدس، الخ. إنَّ إعادة الكتابة بالنسبة إليهم جميعاً، منذ عهد ابن الهيثم، ليست عملاً تصحيحياً. فليس الريّاضيُّ عالِمَ آثار ولا مؤرِّخاً. إنَّ السمة المشترَكة لكلِّ هذه المحاولات هي أنَّ إعادة الكتابة هذه تجري وفقاً لمعايير يقينيّة. وهي لا تتطابق أبداً مع إعادة بناء نظرية فلسفية من أيّ طبيعة كانت. يُعِدُّ الفيلسوف، في هذه الحالة، ما ينقص في النظريّة لكي تظهر بطريقة متماسكة؛ يتعلّق الأمر، في الأساس، بشرح مباشر أو غير مباشر. أمَّا الريّاضي، فيجب عليه أن يبتكِر ويُبَرهِن بدقـَّة القضايا التي تُقوِّي الإسهام القديم عن طريق تجاوزه. وهذا ما فعله ابن الهيثم وَفرما وألبير جيرارد، وكذلك موروليكو نوعاً ما. وهكذا نفهم أنَّ كلمة "تمام" التي استخدمها ابن الهيثم لها معنيان مترابطان بعمق: "إتمام" لسدّ النواقص العائدة لأبلونيوس، و"إنجاز" لإثبات تماسك نظرية المخروطات[٢٩]. يتعلّق الأمر، بالنسبة إلى ابن الهيثم، باستخدام نَهْج كشفي ونهجٍ بنـَّاء في آن واحد. لا يُمكِن بالفعل أن نفهم معنى إسهامه أو تطوُّرَ هذا الإسهام، إذا لم نَتنبَّه إلى هذا البعد المزدَوِج لفعل "التمام". وهكذا قام ابن الهيثم، بعد أن تحقـَّق من نقص بعض "المعاني"، أيْ القضايا والمبرهنات، بتخمين سبب نقصها، بدون تقديم أيَّ إثبات لذلك بالطبع:

"فاعتقدنا أنَّ المعاني التي أخلّت بها المقالات السبع، هي المعاني التي في المقالة الثامنة، وإنـَّما أخـَّرَها لأنـَّه لم يَحتـَجِ إلى استعمالها في المعاني التي ضمَّنها المقالات السبع. وهذه المعاني، التي أشرنا إليها، هي معانٍ تقتضيها معانٍ قد تضمَّنتها المقالات السبع"[٣٠].

[٢٩] نقرأ في "كتاب العين": تتمَّة كلِّ شيء ما يكون تماماً لغايته. ونقرأ في القرآن، سورة المائدة ٣: ﴿**اليوم أكملت لكم دينكم وأتممت عليكم نعمتي**﴾. كما نجد العديد من الآيات القرآنية والألفاظ الشعريّة التي تؤكّد معنى إنجاز وإتمام الشيء حتَّى لا يبقى فيه نقص أو عيب. وهكذا يكون من غير المنطق أن نفهم كلمة "تتمَّة" كمجرَّد "إضافة".

[٣٠] انظر ص ٢٠١.

لم يُفهَم قول ابن الهيثم هذا بما فيه الكفاية؛ فهو لا يُشِير فقط إلى المقالة السابعة، بل يُشير بوضوح إلى مجموع المقالات السبع؛ وفضلاً عن ذلك، إنَّ الأمثلة القليلة التي اختارها مأخوذة من المقالة الثانية من "المخروطات".

وهكذا نقرأ في هذه العبارات الواضحة كيف يفهم ابن الهيثم إعادة كتابة المقالة الثامنة، فهو يريد اكتشاف القضايا، التي تتطلّبها قضايا أبلونيوس المُثْـبَتَة ضمن المقالات السبع، وبرهنة هذه القضايا لتقوية بنية "المخروطات". ونرى كيف يرتسم البرنامج الذي يُوَجِّه مشروع "تمام المخروطات" والذي يُوضِّح اختيار العنوان، كما يُوَضِّح الطريقة التي استخدمها ابن الهيثم؛ وهي تقوم على البدء ببحث جديد في الرياضيّات استناداً إلى النتائج التي حُصِل عليها في المقالات السبع، بهدف إكمال البنية المنطقية لعرْض أبلونيوس. وهكذا تـُصبِح إعادة الكتابة ، وفقاً لهذا المعنى، بحثاً ناشطاً. ولكن أين يَكمُن التجديد، لو كان موجوداً بالفعل؟ كلُّ ما نعلمه الآن هو أنَّ لا شيء في هذا المشروع يكفل أن يكون هذا البحث، قد جرى بالضبط وفقاً لأفكار أبلونيوس أو وفقاً لأسلوبه، حتـَّى لو كانت لغته ملائمة للغة أبلونيوس. إنَّ خيار ابن الهيثم، فيما يخصُّ الأسلوب، واضح بدون التباس. نحن نعلم أنَّ أسلوب أبلونيوس تركيبيّ محض في كل المقالات السبع. وإذا استثنينا المسائل الواردة في نهاية المقالة الثانية التي هي مسائل في العمل الهندسي (من ٤٤ إلى ٥٣) حيث يستخدم أبلونيوس التحليل والتركيب، فإنـَّنا نبحث بدون جدوى في المقالات الأخرى فلا نجد أثراً لأيّ تحليل سابق للتركيب. ولا تبتعد المقالة الخامسة نفسها – التي تتميَّز بالتحليل أكثر من المقالات الأخرى –عن المقالات الأخرى في أسلوبها التركيبي. وهذا الخيار المقصود في التركيب يمنعنا من التنبُّؤ بأسلوب المقالة الثامنة. فهل كانت هذه المقالة مُكرَّسة لمسائل العمل الهندسيّ التي قد يكون أبلونيوس قد حلّها بالتحليل والتركيب؟ لا شيء يؤكـِّد ذلك، إذ إنَّ كلَّ مسائل العمل الهندسيّ، باستثناء المجموعة المذكورة آنفاً، قد قـُدِّمت بطريقة تركيبية. هل استخدَم في المقالة الثامنة التحليلَ والتركيبَ ، لسبب غير معروف، خلافاً للطريقة التي اتبعها في باقي الكتاب؟ لا توجَد حجَّة جدِّية لدعم مثل هذا التخمين. ولو كان ذلك صحيحاً لاستحقـَّت المقالة الخامسة، قبل المقالات الأخرى، أن تـُستَخدَم فيها تلك الطريقة. نقول، باختصار، إنـَّه لا يوجَد دليل يدعم مثل هذه الفرضية

حول محتوى المقالة الثامنة وأسلوبها. والشيء الوحيد المؤكَّد لدينا هو أنَّ المقالات السبع الأولى من "المخروطات" كانت لدى ابن الهيثم بالشكل الذي نعرفه الآن، أي بالأسلوب التركيبي الذي يُميِّزها. وهذه هي الحالة، بالتحديد، التي تُعطي لخيار ابن الهيثم كلَّ مغزاه. يُقدِّم ابن الهيثم على الشكل التالي هذا الخيار:

ونجعل استخراجنا لهذه المعاني بالتحليل والتركيب والتحديد لتكون أكمل المقالات بياناً.[٣١]

فما الذي حثَّ ابن الهيثم على اختيار نهج مختلف، في تحريره لمقالة المفروض منها أن تكون امتداداً للمقالات السبع الأولى؟ إنَّ اهتمامه بصيغة الأسلوب الريّاضيّ يتجاوب، كما يبدو، مع التزام جديد.

وهذا الالتزام، الذي نُذكِّر به هنا بشكل إجمالي قبل أن نقوم بتحليله، هو وليد اهتمام رياضيّ بقي يتزايد حتَّى فرض نفسه في نهاية القرن العاشر الميلاديّ، وخاصَّة في أعمال ابن الهيثم؛ وهو أن يُبَرهَن وجود نقاط التقاطع بين القطوع المخروطية إلى أبعد مدى ممكن من الدقَّة. وهذا الاهتمام كان بعدُ موجوداً، بلا شكٍّ، بين السطور في بعض أعمال الهندسة اليونانية – ربُّما كان ذلك في شرح أوطوقيوس للقضيّة الرابعة من المقالة الثانية من كتاب أرشميدس "الكرة والأسطوانة" –؛ ولكن، لقد توجَّب انتظار القرن العاشر الميلاديّ، وخاصّة ابن الهيثم، حتَّى يُصبح هذا البرهان منهجيّاً إلى الحدِّ الذي وصل إليه معه، وحتَّى يتَّخذ كلَّ مظاهر القاعدة المُلزِمة[٣٢]. يهتمُّ ابن الهيثم، بالفعل، ببرهان وجود التقاطع بين قَطعين مخروطيّين، مستعيناً بخواصّ خطوط التقارب وبالخواصّ المحلّيّة للقطوع المخروطية ولنقاط التماسّ بشكل خاصّ. إنَّ هذا الالتزام البرهانيَّ الجديد يمنع بنفسه من إهمال التحليل والتركيب، حتَّى خلال عرض المسألة. إنَّ بروزَ هذا البحث حول وجود الحلول وحول عددها، وفقاً لنظرية التحليل والتركيب، مرتبِطٌ، بعمق، بالبحث المنهجي للأعمال الهندسية بواسطة التقاطع بين القطوع المخروطية. كانت دوافع هذا البحث هندسية وجبرية في آن واحد؛ وهو لم يَجرِ من وقت إلى آخر عند إثارة بعض الأسئلة أو ملاقاة بعض المسائل، كما

---

[٣١] انظر ص ٢٠٢ وما بعدها.

[٣٢] لقد أكّدنا أكثر من مرَّة هذا الالتزام الجديد الذي بدا لنا مُهمّاً والذي لم يلفت نظر أحد :

١) *«La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham», Journal for the History of Arabic Science*, 3 (1979)، ص. ٣٠٩-٣٨٧.

٢) انظر: *«La philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham. I: L'analyse et la synthèse», MIDEO, 20 (1991)*، ص. ٣١-٢٣١.

كان يحصل خلال العصر الهلينيستي، بل أصبح القيام به من بعدُ منهجيّاً بهدف اكتشاف ميدان المسائل الهندسية المُجسَّمة في أغلبها، والمستوية أيضاً. وهكذا يهتمُّ ابن الهيثم، في هذا المؤلّف المكرَّس لكتاب "المخروطات"، على الأخصّ بالأبنية الهندسية المتعلّقة بالقطوع المخروطية: خطوط التماسّ والأقطار والأضلــُـع القائمة...، مع الافتراض أنَّ النسَب والمضروبات والمجموعات والفروق معلومة ثنائيّاً بين هذه القِطَع. ولم يستخدم ابن الهيثم، خلال هذا البحث، القطوع المخروطية لعمل حلول المسائل الهندسية المُجسَّمة فحسب، بل للمسائل الهندسية المستوية أيضاً؛ وهكذا نلقى، على التوالي، حلول المسائل المجسَّمة المبنية بواسطة القطوع المخروطية، كما نلقى حلول المسائل المستوية المبنية بواسطة المسطرة والبركار. ولم يؤكــِّـد بما فيه الكفاية على هذا الحدث المهمّ، مع أنــَّـه يوحي بأنَّ عمل الحلول بواسطة القطوع المخروطية كان قد أصبح طريقة ممكنة القبول في الهندسة، لأنــَّـها أصبحت مشروعة في المسائل المجسَّمة وفي المسائل المستوية أيضاً.

ينتمي "في تمام كتاب المخروطات"، بفضل المسائل المُعالجة فيه والطرائق المتــَّـبَعة والأسلوب المستخدَم، إلى هذا الفصل من العمل الهندسيّ الذي زرع بذورَه الرياضيون اليونان، واعتنى به رياضيّو القرن العاشر الميلادي، قبل أن يُصبح فصلاً كاملاً مع ابن الهيثم على الأخصّ.

٤ – تاريخ النصّ

يوجَد هذا الكتاب لابن الهيثم في مخطوطة وحيدة ضمن مجموعة مهمَّة، ذات الرقم ١٧٠٦، في مكتبة منيسا (*Manisa*) في تركيا. والمجموعة نفسُها تتضمَّن سبعة عشر مؤلّفاً، منها خمسة عشر مؤلّفاً في الرياضيات والفلك. نجد في أوَّلها شرح ابن أبي جرادة، وهو رياضي من القرن الثالث عشر، لكتاب "الأكر" لمنالاوس. يتبع هذا الشرح بعض الإضافات، في نفس الموضوع. ثمَّ نجد رسالة قصيرة (منقوصة) حول القضية الأولى للمقالة العاشرة من "الأصول" وشرحاً منقوصاً من أوَّله ومن آخره، لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس. نُسِخت هذه النصوص في أغلبيتها بنفس اليد؛ والأوراق مُرقــَّـمة بشكل مُتــَّـصل مما يؤكــِّـد انتماءها لنفس الزمرة. وتلي هذه الزمرة الأولى، مباشرة، زمرة ثانية منسوخة بيد أخرى، والأوراق

مرقـّـمة بطريقة مُختلفة. المؤلّف الأوّل، من هذه الزمرة الثانية، هو كتاب ابن الهيثم الذي يحتلّ الأوراق ١ظ-٢٥و. ثــمَّ يلي ذلك كتابٌ أملاه ابن ميمون(ولكنـــه لم يُحرِّره) "حواشٍ على بعض أشكال من كتاب المخروطات". وهذان المؤلّفان منسوخان بنفس اليد التي تبدو أحدث من تلك التي نـَسخت الزمرة الأولى. يبدو، إذاً، أنَّ "في تمام كتاب المخروطات" و"حواشٍ على بعض أشكال كتاب المخروطات" لابن ميمون ينتميان إلى مجموعة أخرى. ثمّ نجد بعد ذلك "تعليقات على المخروطات" محرَّرة من مجهول لأجل استخدامه الشخصي وفقاً لكلامه. ونجد بعد ذلك في المجموعة نصوصاً منسوخة بأيدٍ مختلفة. نــُسِخ أحد هذه المؤلّفات، على سبيل المثال، في تبريز(إيران) حوالي ١٣٠٠/٦٩٩. كل شيء يوحي بأنَّ هذه المجموعة مركــَّبة من عدد من المجموعات الأخرى من قِبَل شخص مطّلِع على العلوم الرياضية ومهتمٍّ خاصّة بالقطوع المخروطية.

تنتهي هنا معرفتنا وفقاً للوضع الحالي للبحث في النصوص والمراجع العربية. وهكذا لا يكون لدينا سوى القليل من المعلومات حول تاريخ نصّ "في تمام كتاب المخروطات". لقد نُسخ هذا النصّ، كما يبدو، في زمن متأخِّر بيد شخص مهتمٍّ بالقطوع المخروطية، ولكنَّ أصحاب هذا النصّ لا يُخبرونا بما يستحقّ الاهتمام.

هذا إذاً نصٌ وصل إلينا في مخطوطة وحيدة نُسخَت في زمن متأخــِّر. لسنا طبعاً أمام حالة فريدة؛ وهي لا تثير أيَّة مسألة، لو كان عنوان الكتاب موجوداً على إحدى قوائم مؤلّفات ابن الهيثم التي أوردها كُتــّاب السِّيَر القدامى، أو لو كان المؤلّف نفسه قد أشار إليه في أحد مؤلّفاته التي وصلت إلينا. ولكنَّ شيئاً من هذا لم يحدث. وهذا الوضع ملائم بالطبع لإثارة الشكوك. والكتاب منسوب بوضوح إلى ابن الهيثم في عنوانه وفي جملته الختامية، وهذا، بالتأكيد، على قدر كبير من الأهميّة، ولكنــَّه لا يكفي لحلّ مسألة نسبة الكتاب بشكل نهائيّ. ويجب بالمقابل أن نُقيِّم، بشكل صحيح، سكوت كتــّاب السِّيَر وسكوت ابن الهيثم نفسه. إنَّ نظرة سريعة على القوائم[٣٣]، للمقارنة فيما بينها، تـُبيِّن أنــَّه لا توجَد قائمة كاملة بين القوائم الثلاث الرئيسية – القفطي وابن أبي أصيبعة ومخطوطة لاهور – وهي بالإضافة إلى ذلك مُختلفة فيما بينها. إنَّ غياب عنوان الكتاب عن هذه

[٣٣] انظر: المُجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٤٧٨-٥٠١.

القوائم لا يكفي للحكم عليه مُسبَّقاً بأنه منسوب خطأ إلى ابن الهيثم. وتـــبيِّن هذه القوائم نفسها أنَّ سكوت ابن الهيثم لا يُشكـــِّل أيضاً حُجَّة جدِّية للتشكيك بصحَّة نسبة الكتاب إليه؛ كما نـــُشير من ناحية أخرى إلى أنَّ الكتابين، اللذيْن قد أمكن على وجه الاحتمال لابن الهيثم أن يُشير فيهما إلى "في تمام كتاب المخروطات"، مفقودان؛ وهما "في خواصّ القطوع" وَ "في عمل القطوع المخروطية".

تـــُصبح مسألتنا واضحة إذاً: لدينا نصّ منسوب بوضوح إلى الحسن بن الهيثم، بدون أن يوجَد أيُّ عنصر خارجي لتأكيد أو لِنَفــْـي هذه النسبة. فالوسيلة الوحيدة التي تبقى لدينا هي الرجوع إلى النصّ نفسه.

إنَّ بنية النصّ وتنظيمه موافقان لأسلوب يُمكن أن نستدِلَّ عليه في أعمال أخرى لابن الهيثم. فقد كان من عادة ابن الهيثم بالفعل أن يبدأ بالإشارة إلى الهدف الذي يسعى إليه في الكتاب وإلى المسألة التي يُريد معالجتها، ثمّ يتكلّم على إسهامات أسلافه عندما تكون موجودة.

ليس ابن الهيثم المؤلّف الوحيد الذي يبدأ عرضه بهذا الشكل، ولكنَّ المصطلحات التي يستخدمها لا تدع لدينا مكاناً للشكّ؛ إنـــَّها مصطلحات ابن الهيثم. لنأخذ بعض الأمثلة:

استقرينا ... وتصفَّحنا	استقراء... وتصفُّح ("في المناظر" ص. ٦٢)
تطلع النفوس	تسمو النفوس (المجلَد الرابع من هذه الموسوعة، "في التحليل والتركيب"، ص. ٣٠١، ٣)
المعاني التي ذكرها	المعاني التي لم يذكرها (المجلَد الرابع من هذه الموسوعة، "المعلومات"، ٥٣٦، ١٣)
[تمكن هذا المعنى في اعتقادنا وَقَوِيَ في نفوسنا]	[هذا المعنى هو أحد ما قَوَّى رأيَ المتفلسفين في اعتقادهم (المجلّد الثاني، "في تربيع الدائرة" ص. ١٥٥، ٧-٨).]

يُمكن أن نواصِل سرد الأمثال التي لا يُمكن أن تناقض هويَّة المؤلّف. يكفي أن نلاحظ كثرة استخدام "معنى"، "معاني" الذي يُميِّز أسلوب ابن الهيثم. أمّا لغة الرياضيين البسيطة فهي

تلك التي يستخدمها في كلّ كتاباته، باستثناء عبارة "قطع صنوبري" التي يستخدمها، أربع مرّات في "في تمام المخروطات"، ليدلَّ على القطع المخروطيّ . ولكنَّ ابن الهيثم لا يستخدم أبداً هذه العبارة، في كتاباته الأخرى، للدلالة على القطع المخروطيّ؛ وذلك بخلاف ما فعله سلفـُـه الخازن على سبيل المثال. ولنلاحظ أوّلاً أنَّ كلمة "صنوبري" توجَد في ترجمة "المخروطات" التي نسخها ابن الهيثم بيده، ضمن القضايا ذات الأرقام ١٧ وَ ١٩ وَ ٢٠ من المقالة الأولى، وفي مواضع أخرى من هذه الترجمة[٣٤]. فليس من المُستَبعَد أن يكون ابن الهيثم قد تأثـَّـر بالمصطلحات المُستخدَمة في هذه الترجمة، خلال تحريره مقالة "في تمام المخروطات" التي تصوَّرها بعد مقالة أبلونيوس السابعة لتتمِّم "المخروطات". وهكذا فإنَّ استخدام ابن الهيثم لعبارة "قطع صنوبري"، بدلاً من أن يُشكِّل حُجَّة ضدَّ نسبة "في تمام المخروطات"، يوحي لنا بتخمين لتاريخ تحريره. إنَّ تواجد عبارة "صنوبري" في مقالة "في تمام المخروطات"، وفي هذه المقالة فقط، تـَـظـُهِر بالفعل تقارباً في المفردات مترابطاً بعمق مع تقارب في المسائل والموضوع. وهذا ما يوحي بأنَّ ابن الهيثم النسّاخ أثـَّـر في ابن الهيثم الرياضي في اختيار مصطلحاته. ولكن لدينا ما نـُـضيفه على كلّ هذا.

نلاحظ ، عند تفحُّصنا لمخطوطة "المخروطات" المنسوخة بيد ابن الهيثم، كما وصلت إلينا، أنــَّها منقوصة في آخر القضية الثامنة والأربعين من المقالة السابعة؛ إذ إنَّ نهاية هذه القضيَّة والقضايا الأربع التالية غير موجودة. إنَّ هذا الضياع لا يعود إلى زمن قريب، بل إنــَّه سابق للقرن الثالث عشر الميلاديّ. لقد كانت هذه النسخة، بالفعل، في حوزة الرياضي ابن أبي جرادة الذي زاد عليها الكثير من الحواشي؛ لقد كتب بيده على هامش الصفحة الأخيرة (الورقة ٣٠٦ظ): " بقي من هذا الكتاب المقالة الثامنة". ولكنَّ ابن أبي جرادة كان على معرفة جيِّدة جدَّاً بكتاب "المخروطات" – كما تشهد على ذلك شروحه لأعمال ثابت بن قرّة[٣٥] – فلا يُمكن أن يكون جاهلاً بأنَّ المقالة الثامنة لم تـُـتَرجم إلى العربية. ولكنَّ جملته، بالرغم من ذلك، توحي بأنَّ النسخة التي كانت في حوزته كانت تتضمَّن ثماني مقالات. وإذا كان تخميننا صحيحاً، لا تكون المقالة الثامنة سوى كتاب ابن الهيثم "في تمام كتاب المخروطات". يأتينا إثبات هذا التخمين من ابن ميمون الذي هو فيلسوف وعالِم في القرن الثاني عشر، عاش هو

---

[٣٤] انظر مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٦٢.
[٣٥] انظر: المُجلد الأوّل من هذه الموسوعة.

أيضاً في القاهرة، كما اطّلع على "في تمام كتاب المخروطات" وكتب بعض الحواشي لبعض القضايا منه. ولكنَّ ابن ميمون اعتبر أنَّ كتاب "في تمام كتاب المخروطات" هو المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات". يتبع ابن ميمون في حواشيه، بالفعل، مقالات "المخروطات" بالترتيب، حتـــَّى يكمل بعض البراهين التي ترك أبلونيوس إتمامها للقارئ، حيث يتعلّق الأمر بمراحل وسيطة سهلة في هذه البراهين[٣٦]. يُسجِّل ابن ميمون الحواشي للمقالة الثامنة التي ليست سوى "في تمام كتاب المخروطات"؛ وتشرح هذه الحواشي عبارات من هذا الكتاب. وهكذا نرى أنَّ "في تمام كتاب المخروطات" كان مُتداوَلاً بين القرنين الحادي عشر والثالث عشر الميلاديين كأنـــَّه – في نظر بعض المؤلّفين على الأقلّ – المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات". ولكن، ليس من الممكن أن نضع مسؤولية هذا الالتباس على عاتق ابن الهيثم، إذ إنَّ مقدِّمة "في تمام كتاب المخروطات" لا تدع، بالفعل، مجالاً لأيّ التباس. فمن أين أتى هذا الخطأ؟ التخمين الذي نُقدِّمه يأخذ، كما يبدو، بعين الاعتبار مجموع هذه الوقائع: مسألة الاستعمال الاستثنائي لعبارة "قطع صنوبري"، ملاحظة ابن أبي جرادة، التباس ابن ميمون وسكوت كـــُتــّـاب السِّيَر القدامى.

يُمكِن أن يكون ابن الهيثم قد حرَّر كتاب "في تمام كتاب المخروطات"، مباشرة بعد أن أنهى نسخة من كتاب "المخروطات"، ثمَّ وضعه في نهاية هذا الأخير. فيكون، في هذه الحالة، قد كتب "في تمام كتاب المخروطات" حوالى سنة ٤١٥/١٠٢٤، أي في وسط فترة النضوج، وهذا ما يعطي فكرة جيِّدة عن مُحتوى هذا الكتاب المهمّ في هندسة المخروطات.

نترك للبحوث المستقبليّة مسألة تأكيد أو تصحيح أو نفي هذا التخمين. وإذا أخذنا الآن بعين الاعتبار هذه الحُجج التي عرضناها والتي يجب أن يُضاف إليها، كما سنرى، المُحتوى الرياضي للكتاب، نجد أنـــَّها كافية للتحقـــُّق من أنَّ "في تمام كتاب المخروطات" هو كتاب حرَّره ابن الهيثم عندما كان ينسخ كتاب "المخروطات".

لنرجع الآن إلى نسخة "في تمام كتاب المخروطات"، فنتحقـــَّق أنها قد نُسِخت بخطٍّ نسخيّ جميل واضح ومُتقن. الأشكال مرسومة بنفس العناية. والإضافات النادرة في الهامش كـــُتِبَت

---

[٣٦] انظر : حواشٍ على بعض أشكال كتاب المخروطات، مخطوطة منيسا (*Manisa*) ١٧٠٦، ورقة ٢٦ظ ؛ انظر أيضاً: رشدي راشد: «*Philosophie et mathématiques : Maïmonide et le modèle andalou de rencontre philosophique*»، ضمن : *Roshdi Rashed et Tony Levy :Maïmonide Philosophe et savant,1138-1204,(Peters, 2004).*

بيد النسّاخ الذي زادها في مواضعها، مع إضافة كلمة "صحّ"، خلال مراجعته للنسخة مقارنة بالنسخة الأصلية. لا يتضمَّن النصّ أية كلمة مشطوبة ولا حاشية مضافة.

ربَّما كانت هذه النوعية الممتازة للنسخة التي حثَّت ن. ترزيوغلو (*N. Terzioğlu*)، الذي كان أوّل من لفت الأنظار إلى هذه المخطوطة، على نشر صورة فوتوغرافية عن النصّ مع تمهيد ومقدِّمة مختصرة. وكان لهذه النشرة التي صدرت سنة ١٩٧٤[٣٧] فضل كبير في الإعلام عن نصّ ابن الهيثم وفي انتشاره. ولقد أعطى م. عبدلكبيروف[٣٨] سنة ١٩٨١ أوّل دراسة للمحتوى الرياضي لهذا الكتاب لابن الهيثم، فأخبر بذلك مؤرِّخي الرياضيات بأهمّيته الكبرى. ثمَّ نشر ج. ب. هوجنديجك (*J. P. Hogendijk*)، بعد ثلاث سنوات أطروحة لنيل الدكتوراه قام فيها بتحقيق نقدي وبترجمة إلى الانكليزية وبشرح تاريخيّ ورياضيّ ضخم. لقد كان لهذه النشرة فائدة كبرى للتعريف في الغرب بكتاب ابن الهيثم هذا، وبالنتائج التي توصَّل إليها هذا الأخير. لقد أشرنا قبل قليل إلى أنَّ ن. ترزيوغلو اكتفى بتصوير المخطوطة، نظراً إلى النوعية الممتازة للنسخة. أمّا ج. ب. هوجنديجك فلقد ارتأى أن ينشر تحقيقاً نقدياً[٣٩] (نشير إليه بالحرف ح في التعليقات والحواشي). هذا التحقيق، مع أنــَّه مغلوط، يبقى تحقيقاً قبل كلّ شيء. إنَّ أكبر عدد من الأخطاء الموجودة فيه عائدة إلى إرادة حميدة لدى المؤلّف، مع أنَّ نتيجتها مؤسِفة، في تصحيح نصٍّ عربيّ، مع أنــَّه صحيح تماماً. سنكتفي هنا بإيراد الأخطاء التي أدخِلت في النصّ العربيّ المنقول، تاركين للقارئ مهمة تصحيح الأخطاء الإملائية العائدة للكتابة القديمة (المكافي، احديهما، الخ) وتصحيح أخطاء قراءة الأحرف في الاستدلالات والأشكال الهندسية. أمّا التفسيرات الغير منطقيّة الواردة للأسف في الترجمة الإنكليزية وفي الشروح، فإنني أفضّل أن لا أشير إليها هنا. إنَّ رقم الصفحة ورقم السطر المشار إليهما بين قوسين، في القائمة التالية، يخصّان النشرة المذكورة.

---

[٣٧] انظر: *Das Achte Buch zu den Conica des Apollonius von Perge/ Rekonstruiert von Ibn al-Haytham. Herausgegeben und eingeleiter von N. Terzioğlu*، (إسطنبول، ١٩٧٤)

[٣٨] انظر: *Matematika i astronomiya v trudakh Ibn Sina, yego sovrenrennikov i posledovatelei* (طشقند ١٩٨١)، ص ٨٠-٩٤.

[٣٩] انظر: *J. P. HogendijkK Ibn al-Haytham's Completion of the Conics, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences 7(New-York / Berlin / Heidelberg / Tokyo, 1985).*

	نشرة ج. ب. هوجنديجك	التصحيح
(١٣٥، ١١)	تضمنتها	ضمَّنها
(١٣٥، ١٨)	هي	هن
(١٣٧، ٧)	يقول... أن	يقول... إنَّ
(١٣٧، ٩)	تضمنت	تتضمن
(١٣٧، ١٣)	في	من
(١٣٧، ١٨)	نقل	تقدم
(١٣٧، ١٨)	درية	دُرِّية
(١٣٧، ١٩)	هي	هن
(١٣٧، ١٩)	تضمتها	ضمنتها
(١٣٧، ١٠-٢١)	نقل [بها]	تقدمها
(١٣٩، ١)	لم يمكن	[لم] تمكن
(١٣٩، ١)	حسن	بحسن
(١٣٩، ٣)	هي	هن
(١٤١، ١)	معلوم	معلوماً
(١٤١، ٣)	القطع نسبة	القطع مثل نسبة
(١٤١، ٤)	<وليكن>	–
(١٤١، ٨)	<فنفرض ... ب هـ >	–
(١٤١، ١٤)	كما	لما
(١٤٣، ٦)	في	من
(١٤٣، ٩)	برهانه إنا	برهانه أنا (وفي مواضع مختلفة)
(١٤٥، ٨)	كما	لما
(١٤٥، ٨)	من	في
(١٤٥، ١١)	كما	لما
(١٤٥، ١٢)	في نسبة	ونسبة
(١٤٥، ١٢)	<ونسبة ا هـ إلى هـ ك >	–
(١٤٧، ٥)	[مر د ب و حـ مر ر ب]	< الخط ... كنسبة>
(١٤٩، ١٠)	فأما	فإما

(١٤٩، ١٥) للقطع	لقطع
(١٥١، ١٠) مربع ا ف ، فنسبة	مربع ا ف. ونسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا س كنسبة م ه إلى هـ ا، فنسبة
(١٥٣، ٤) نسبة	<فإن> نسبة
(١٥٣، ١٣) أيضاً. والقطع الزائد	أيضاً. والقطع المكافئ يمرّ بنقطةا، والقطع الزائد
(١٥٣، ١٤) رأسه	<و>رأسه
(١٥٣، ١٤) وتقعّره	ومقعّره
(١٥٣، ١٥) لتقعّر	لمقعّر
(١٥٥، ١٤) يفصله	فصله
(١٥٧، ٥) فمجموع	<و>مجموع
(١٥٩، ١٠) فنسبة	ونسبة
(١٥٩، ١٠) فنسبة	ونسبة
(١٦٣، ١٤) سلك	سيق
(١٦٣، ١٥) قدمنا	قد بيناه
(١٦٣، ١٨) سواء	سوى
(١٦٥، ٨) <إذا امتد>	—
(١٦٥، ١١-١٤) جهة <ص ... > ويصير	جهة و يصير
(١٦٥، ٢٢) [لا] يرسم	قد رسم
(١٦٧، ٧-٨) <وعمود ث ظ >إذا	فإذا
(١٧٣، ٥) وصفنا	نصف
(١٧٣، ١) فكان	وكان
(١٧٥، ٦) تمم	تمّ
(١٧٥، ٧) وتقعراهما متقابلان	ومقعراهما متقابلان
(١٧٧، ٢٣) فنسبة	ونسبة
(١٧٩، ٩) فكذلك	ولذلك
(١٨١، ٥) تقعريهما	مقعريهما
(١٨١، ٦) وإنه	فإنّه
(١٨١، ٨) كما	لما

(١٨١، ١٠) <على نقطتين>	—
(١٨١، ١٢) التي من	التي <مما يلي> القطع من
(١٨١، ١٨) يحيط	تحيط
(١٨١، ٢٣) سنبين كيفية وجوده	<أنه> سيتبين من وجوه
(١٨٣، ٣) إلى القطر	إلى <نصف> القطر
(١٨٥، ١٦) فيكونان	فيكونا
(١٨٥، ١٨-١٩) متشابهين ... مربع ف ط	متشابهين، فتكون نسبة هـ ف إلى ف ط كنسبة ط ف إلى ف ا <وكنسبة هـ ط إلى ط ا >، فتكون نسبة هـ ف إلى ف ا كنسبة مربع هـ ف إلى مربع ف ط
(١٨٩، ١) فزاوية	وزاوية
(١٩٣، ٨) كما	لما
(١٩٩، ٦) <ونسبة ... د ن>	—
(١٩٩، ٧) <إلى ... ح ن>	—
(١٩٩، ١٦) فكان	وكان
(١٩٩، ١٧) وكان	[و]كان
(١٩٩، ١٧) فكانت	وكانت
(١٩٩، ١٨) فتكون نقطة معلومة	فتكون نقطة ا معلومة
(١٩٩، ١٨) فيكون	ويكون
(١٩٩، ١٩) (٢) فتكون	وتكون
(٢٠٣، ١٦) فيتبين	فنبين
(٢١١، ٩) القطر	<قطر> القطع
(٢١١، ١٦) عن القطعة	عن القطع
(٢١١، ١٧) ويتبين	وتبين
(٢١٣، ٦) الأخير	الآخر
(٢١٣، ١٧) الأخير	الآخر
(٢١٣، ١٨) يقطع	تقطع
(٢١٥، ٩) المماسين	المتماسين
(٢١٥، ١٣) المماسان	المتماسان

(٢١٧، ١)	معلوم	معلوماً
(٢١٧، ١٤)	كما	لما
(٢٢٣، ٤)	فضرب	وضرب
(٢٢٣، ١٥)	وضلعه القائم الذي	وضلعه القائم <هو> الذي
(٢٢٣، ١٦)	أما	إما
(٢٢٥، ١٤)	أما	إما
(٢٢٩، ٩)	تقعريهما	مقعريهما
(٢٢٩، ١١)	<و>الذي	الذي
(٢٢٩، ١٤)	<لا> يقع عليه	يقع عليه < قطع هـ ن >
(٢٣١، ١)	معلوم	معلوماً
(٢٣١، ١٣)	فضرب	وضرب
(٢٣١، ١٤)	(٢) معلوم	معلومة
(٢٣١، ١٧)	<و> هي	هي
(٢٣٥، ٨)	أعظم	أعظم <من كـ>
(٢٣٧، ١٧)	هو أن	هو <إما> أن
(٢٣٧، ١٨)	خارج	داخل
(٢٣٧، ٢٠)	داخل	خارج
(٢٣٩، ١)	معلوم	معلوماً
(٢٣٩، ١٢)	فقطع	وقطع
(٢٤١، ٢)	ولتكونا ح ط	وليكونا هـ ح د ط
(٢٤١، ٦)	فأما	فإما
(٢٤٥، ٢٠)	خط	لخط
(٢٤٧، ٥)	نسبة ح ع إلى ع ف	نسبة ضرب ح ع في ع ط < إلى ضرب ع ف في ع ط >
(٢٤٧، ١٤)	خط الترتيب القطع	خط ترتيب القطع
(٢٥٣، ١٦)	< كنسبة ح كـ >	< هي كنسبة ح ع إلى ع ف، التي هي كنسبة ح ط >
(٢٥٥، ٦)	< إلى محيط القطع الناقص>	–
(٢٥٥، ٨)	إلى خطّ الترتيب الذي يخرج	إلى خطّ الترتيب مثل خطّ الترتيب الذي يخرج
(٢٦١، ١)	<وسهمه ا د >	–

(٢٦٥، ٣) القطر	القطر <القائم>
(٢٦٧، ٩) فمربع... معلوم	أو مربع... معلوماً
(٢٦٧، ١٠) معلوم	معلومان
(٢٦٩، ٨) مقالة	المقالة
(٢٧٣، ١١) في	من
(٢٧٧، ١٥) مربعي	< مجموع > مربعي
(٢٧٧، ١٨-١٩) <كانت نسبة ... معلومة>	–
(٢٧٧، ١٩) وكان ضربه فيه معلوماً	وكان ضربه فيه < مع مربع القطر المجانب > معلوماً
(٢٧٧، ١٩) فكان	كان
(٢٧٩، ٨) قطر القطع	قطراً للقطع
(٢٨٣، ١٧) فضرب	وضرب
(٢٨٧، ٤) التي	التي <هي>
(٢٩١، ١١) المقالة	المقالة
(٢٩٥، ١٨) التي	التي <هي>
(٢٩٩، ٧) كلما	كل ما
(٢٩٩، ٨) وكلما	وكل ما

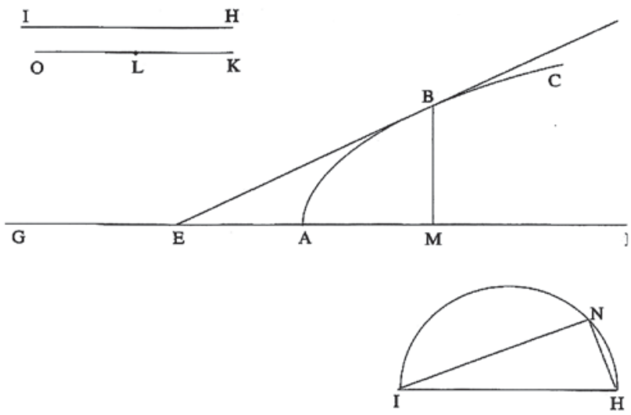
الشرح الريّاضيّ

إنَّ بنية "تمام كتاب المخروطات" بسيطة. يبدأ ابن الهيثم بمقدِّمة قصيرة جدّاً يُشير فيها إلى حالة البحوث ويعرض باختصار هدفه. يلي مباشرة هذه المقدِّمة، التي شرحناها آنفاً، عددٌ من المسائل الهندسية التي لا يُظهِر عرضها أيَّ اهتمام تعليمي. وذلك أنـــَّـه قد يحدث، بالفعل، أن تأتي بعد مسألة صعبة، مسألة أخرى أبسطُ منها، كما سنرى لاحقاً. فالخاصّة المطلوبة هي التي تـــُرتِّب، في الواقع، مجموعة المسائل. وهكذا يسعى ابن الهيثم في المسألة الأولى إلى تحديد نقطة B من قطع مكافئ ذي رأس A، بحيث يقطع الخطُّ المماس في B المحورَ على النقطة E على أن تكون النسبة $k = BE/EA$ معلومة. وتـــُعالج المسائل ذات الأرقام ٢، ٣، ٤ وَ ٥ نفسَ الخاصَّة، ولكن للقطوع المخروطية التي لها مركز. تُحدِّد الخواصُ المطلوبة، بهذه الطريقة، ترتيبَ القضايا. إنَّ عرض ابن الهيثم، لكلّ مسألة من المسائل التي يُعالِجُها منتظمٌ: تحليل وتركيب ومناقشة (تحديد). ولكن، قد يحدث أكثر من مرَّة أن يترك ابن الهيثم المناقشة بدون أن يُتِمَّها. إنَّ هذه النواقصَ مُدهشة عند رياضي من مستوى ابن الهيثم؛ وخاصَّة أنـــَّـها تتواجد في كتابات أخرى له، مثل "المعلومات" على سبيل المثال. يوحي تفحُّصٌ حذِرٌ للنصّ بعدَّة أسباب تـــُرجِع إلى عدَّة أنواع من النواقص التي يكون من المؤسف الخلطُ فيما بينها. يبدو أنَّ أحد هذه الأسباب هو الصعوبة الموضوعية للقيام بمناقشة وجود الحلول وعددها عن طريق الهندسة. والسبب الآخر، الذي هو ذاتي بشكل واضح يَرجِع إلى خطأ ابن الهيثم الذي أخذ على نفسه أن لا يستخدِمِ إلا القطوع المخروطية، بينما كانت توجَد طرائق أكثر سهولة لمعالجة الموضوع وكان على علم بها. ولنشِرِ أيضاً إلى ميل ابن الهيثم إلى الإسراع بإنهاء دراسته للمسألة عندما تكون سهلة. سنرى لاحقاً هذه الأسباب المختلفة. ولكن، لكي نستطيع التمييز بين كلّ هذه الحالات ولكي نعطي الشروط الصحيحة للحلّ، قد نلجأ إلى القيام بالشرح مرّتين. الشرح الأوّل، وهو هندسيّ، يضعنا مباشرة في الوضع الرياضي لابن الهيثم؛ أمّا الآخر، وهو الشرح التحليليّ، فهو بالمقابل غريب عن ابن الهيثم، ولكنـــَّـه يساعدنا على إقامة المناقشة بدِقـــَّة عندما يجب تكملة مناقشة ابن الهيثم. ليس من الضروري أن نـــُذكـــِّـر هنا أنـــَّنا لا ننسِب هذا المنهج إلى رياضيّي القرنين العاشر والحادي عشر الميلاديين.

لنبدأ الآن بتحليل كتاب ابن الهيثم ولنشرح، مع التفاصيل الضرورية، تطوُّرَ الأفكار الرياضية المُستَخدَمة. سوف نتبع بدورنا ترتيب العرض الذي قام به ابن الهيثم.

١– ليكن معنا قطع مُكافئ ABC ذو مِحور AD وخطّان HI وKL بحيث تكون النسبة $\frac{HI}{KL}=k$ معلومة.

المطلوب هو تحديد النقطة B على القطع المكافئ بحيث يقطع خطُّ التماسِّ في B المحورَ على النقطة E مع $\frac{BE}{EA}=k$.



الشكلان ١ و ٢

التحليل: إذا كان BE خطَّ التماسّ وكانت النقطة M المسقط العمودي للنقطة B على المحور، تكون القطعة BM إحداثيّة الترتيب للنقطة B، ويكون معنا: $AE = MA$ ("المخروطات"، المقالة الأولى، القضية ٣٥).

يكون معنا: $\frac{BE}{EM}=\frac{BE}{2EA}=\frac{k}{2}$ و $BM \perp EM$ ، فتكون الزاوية E معلومة. وهذا يفرض المتباينة $k > 2$، فتكون المتباينة $HI > 2KL$ شرطاً ضرورياً.

٢– **التركيب:** نحن نعرف، وفقاً للقضية ٥٠ من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات"[1]، كيف نرسم خطّاً مماسّاً بحيث يُشكِّل مع المحور زاوية معلومة.

[1] انظر القضية ٥٠ في نشرة هايبرغ (Heiberg)، شتوتغارت (Stuttgart) ١٩٧٤:
Les Coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke (Paris, 1959)

ليكن $KO = 2LK$ ، $HI > KO$ ؛ إذا رسمنا في الدائرة ذات القطر HI وتراً IN بحيث يكون $IN = KO$ ، يكون معنا : $\frac{IH}{IN} = \frac{k}{2} = \frac{EB}{EM}$، فتكون الزاوية $\widehat{HIN}$ زاوية خطّ التماسِّ المطلوبة، فنعرف بذلك كيف نرسم خطّ التماسّ هذا وهو BE. وهكذا نكون قد رسمنا المثلّث القائم الزاوية MEB المُشابه للمثلّث HIN، فيكون معنا إذاً: $\frac{HI}{IN} = \frac{BE}{EM}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{BE}{EA} = \frac{HI}{KL} = k$.

٣– ليكن Γ قطعاً مخروطيّاً ناقصاً أو زائداً، ذا محور AD، ولتكن g/h نسبة معلومة مع $g > h$.

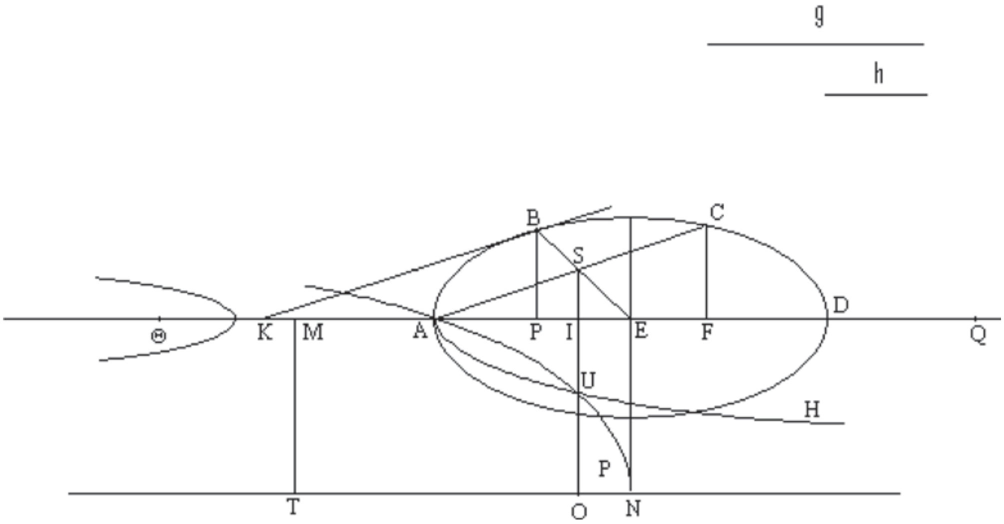
المطلوب هو تحديد نقطة B على القطع Γ، بحيث يقطع خطّ التماس في B المحورَ على النقطة مع: $\frac{BK}{KA} = \frac{g}{h}$.

إنَّــه من الواضح أنَّ $BK > AK$، لكلّ نقطة B من القطع المخروطيّ؛ فإذاً، يتطلّب تحديد B مع $\frac{BK}{KA} = \frac{g}{h}$، أنْ يكون $g > h$.

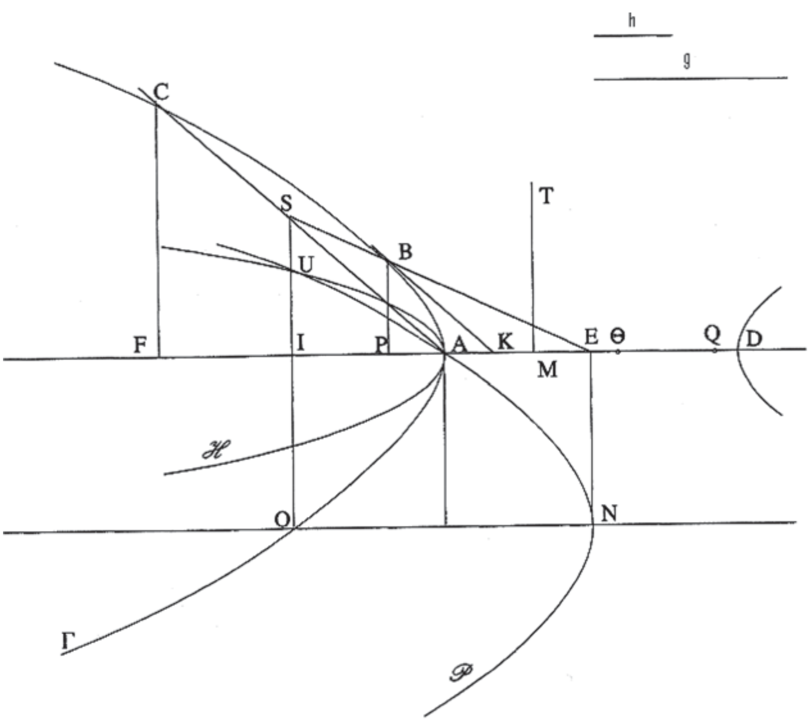
فإذا كانت Γ قطعاً ناقصاً، يكون خطّ التماسّ في النقطة B، التي هي طرف المحور العموديّ على AD، موازياً لـِ AD وتكون النقطة K في اللانهاية. يُمكن أن نعتبِر أنَّ هذه حالة حدِّية حيث يكون $BK = AK$، فتكون هذه النقطة B حلاً للمسألة عندما يكون $g = h$.

ملاحظة: سنرمز بالحرف d إلى طول القطر، وبالحرف a إلى الضلع القائم الذي يتوافق معه.

تحليل: ليكن AD المحور (المُجانِب في حالة القطع الزائد)، وليكن E مركز القطع المخروطي Γ، KB الخطّ المطلوب في المسألة وَ AC الوتر، الموازي لـِ KB، الذي يقطع EB على النقطة S؛ ويكون معنا $SA = SC$.



الشكل ٣-١



الشكل ٣-٢

لتكن P، I وَ F المساقط العمودية للنقاط B، S وَ C على المحور DA. يكون معنا، وَفقاً للقضية ٣٧ من المقالة الأولى: $KE \cdot PE = EA^2$، فنستنتج أنَّ :

$$\frac{PE}{EA} = \frac{EA}{EK} = \frac{PA}{AK}, \qquad (١)$$

ولكن $\frac{SA}{BK} = \frac{AE}{EK}$، لأنَّ $BK \;//\; SA$. يكون معنا إذاً: $\frac{PA}{AK} = \frac{SA}{BK}$، فنستنتج أنَّ : $\frac{G}{H} = \frac{BK}{AK} = \frac{SA}{AP}$. ونستنتج أيضاً من توازي SA وَ BK أنَّ: $\frac{EI}{EP} = \frac{ES}{EB} = \frac{EA}{EK}$، فيكون إذاً: $\frac{EP}{EA} = \frac{EI}{EP}$، وفقاً للعلاقة (١)، فنستنتج أنَّ : $EI \,.\, EA = EP^2$.

إذا كانت النقطة M على الخطّ DA بحيث يكون $\frac{d}{a} = \frac{ME}{MA}$، تكون النسبة $\frac{ME}{EA}$، عندئذ، معلومة. ونحن نعلم، وَفقاً للقضيتين الثانية والثالثة من المقالة السابعة، أنــَّـه إذا كانت Θ نقطة على الخطّ DA بحيث يكون: $\frac{a}{d} = \frac{\Theta A}{\Theta D}$، يكون عندئذ: $\frac{\Theta D}{AD} = \frac{\Theta F \,.\, AF}{AC^2}$ [٢].

ولكنَّ S هي وسط AC و َ I هي وسط AF، ومن جهة أخرى M هي وسط ΘA، لأنَّ :

$$\frac{d}{a} = \frac{ME}{MA} = \frac{\Theta D}{\Theta A} \Leftarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AD}{\Theta A} = \frac{2AE}{\Theta A} \Leftarrow \Theta A = AM\frac{1}{2}.$$

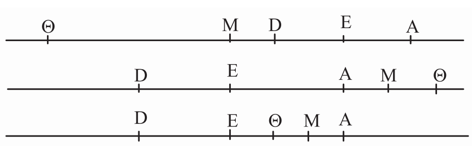
فنستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{\Theta F . AF}{AC^2} = \frac{MI . IA}{AS^2} = \frac{\Theta D}{AD} = \frac{ME}{AE}$، فنحصل على:

$\frac{MI . IA}{AP^2} = \frac{AS^2}{AP^2} . \frac{ME}{AE} = \frac{ME}{EA} . \frac{g^2}{h^2}$، فتكون هذه النسبة معلومة.

ليكن EN بحيث يكون $EA \perp EN$ ؛ و $EA = EN$، وليكن NO موازياً لـِـ EA. القطع المكافئ $\mathcal{P}$، ذو المحور NO والضلع القائم EN والرأس N، يمرُّ بالنقطة A. ويقطع الخطّ SI القطع المكافئ على النقطة U. ويكون معنا: $EA \,.\, EI = EA \,.\, ON = EN \,.\, ON = OU^2$

---

[٢] تُسمَّى ΘA الخط االشبيه النسبة (أبلونيوس، المقالة السابعة، القضيتان ٢ و٣)؛ أمّا $D\Theta$ فليس لها اسم. تكون Θ خارج الخط $[DA]$، في حالة القطع الناقص، ويكون معنا: إذا كان $a < d$ (انظر الخط الأوَّل في الشكل، أدناه)، يكون $d = \Theta D - \Theta A$ ؛ إذا كان $a > d$ (انظر الخط الثاني في الشكل، أدناه) ، يكون $d = \Theta A - \Theta D$. وتكون Θ بين A وَ D، في حالة القطع الزائد (انظر الخطّ الثالث في الشكل، أدناه)، ويكون $d = \Theta D + \Theta A$.



وتكون M، في جميع الحالات، في وسط ΘA، ويكون $ME = \Theta D / 2$.

$= EP^2$، فيكون معنا إذاً $EP = UO$، فنستنتج أنَّ: $AP = UI$ [٣]. يكون معنا إذاً: $\frac{MI.IA}{UI^2} = \frac{ME}{EA} \cdot \frac{g^2}{h^2}$؛ وهذه النسبة معلومة، فنستنتج أنّ U هي على قطع زائد $\mathcal{H}$ ذي محور AM وذي ضلع قائم معلوم. تكون النقطة U إذاً نقطة تقاطع بين القطع الزائد $\mathcal{H}$ والقطع المكافئ $\mathcal{P}$، فهي معلومة. ونستنتج من النقطة U بالتتابع النقاط I، F، C، S وَ B والخطّ KB الموازي للخطّ CS.

وإذا تناولنا الحالة التي يكون فيها الخطّ AD المحورَ الأصغر ("السهم الأقصر" كما يقول ابن الهيثم) للقطع الناقص، يكون العمل هو نفسه بالضبط، ولكن مع $\frac{ME}{MA} = \frac{d}{a} < 1$، فتكون النقطة M (التي هي خارج الخطّ AE) عندئذ من جهة النقطة E. النقطة I، التي هي بين A وَ E، توجَد عندئذ بين A وَ M والقطع المخروطي المساعد $\mathcal{H}$ الذي يمرُّ بالنقطة U لم يَعُد قطعاً زائداً، بل أصبح قطعاً ناقصاً.

تناول ابن الهيثم هذه الحالة، ولكنـــه لم يوَسِّعها لأنَّـــها مشابهة تماماً للحالة السابقة.

٤– **التركيب:** القطع المخروطي (Γ) ذو المحور AD والمركز E معلومٌ، والنقطة M التي تـــحـُــقِّـق $\frac{ME}{MA} = \frac{d}{a}$ معلومة، فيكون الخطّ AM معلوماً (انظر الشكلين ٣–١ وَ ٣–٢).

نرسم كما فعلنا سابقاً القطع المكافئ $\mathcal{P}$.

إذا وضعنا: $\frac{AE}{EQ} = \frac{g^2}{h^2}$ وَ $\frac{ME}{EQ} = \frac{AM}{MT}$، يكون الخطّ TM معلوماً، وَ TM هو الضلع القائم للقطع الزائد المُحدَّد أعلاه. تـــعطي مُعادلة $\mathcal{H}$، بالفعل:

$$\frac{AM}{MT} = \frac{ME}{EQ} = \frac{AE}{EQ} \cdot \frac{ME}{AE} = \frac{g^2}{h^2} \cdot \frac{ME}{AE} = \frac{IM.IA}{IU^2}.$$

إذا تقاطع $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ على النقطة U (انظر المناقشة) نُخرِج IU بحيث يكون $EA \perp IU$؛ لتكن F بحيث يكون $2AI = AF$؛ ولتكن C نقطة القطع المعلوم Γ التي تـــحـُــقِّـق $CF \perp EA$؛ تقطع CA الخطَّ IU على النقطة S؛ يكون معنا $SC = SA$؛ الخطُّ SE هو قطر

---

[٣] يكون معنا $UI = OI - OU$ للقطع المكافئ، $UI = OU - OI$ للقطع الزائد، إذا أخذنا U على نصف القطع المكافئ NA.

للقطع Γ ويلتقي بـِـ Γ في B؛ الخطّ الموازي للخطّ SA المارّ بالنقطة مُماسٌّ للقطع Γ في النقطة B، ويقطع الخطّ EA على النقطة K. لنــُبيِّن أنَّ: $\frac{BK}{KA} = \frac{g}{h}$.

ليكن $BP \perp EA$ ، فيكون معنا: $EI \, . \, EA = EP^2$ (خاصَّة Γ) وَ $NO \, . \, NE = OU^2$ (معادلة $\mathcal{P}$)، فنستنتج أنَّ $EP = OU$ وَ $AP = UI$.

يكون معنا: $\frac{MI.IA}{AS^2} = \frac{ME}{AE}$ (خاصّة Γ)، $\frac{IM.IA}{IU^2} = \frac{AM}{MT}$ (خاصَّة $\mathcal{H}$)، فيكون إذا:

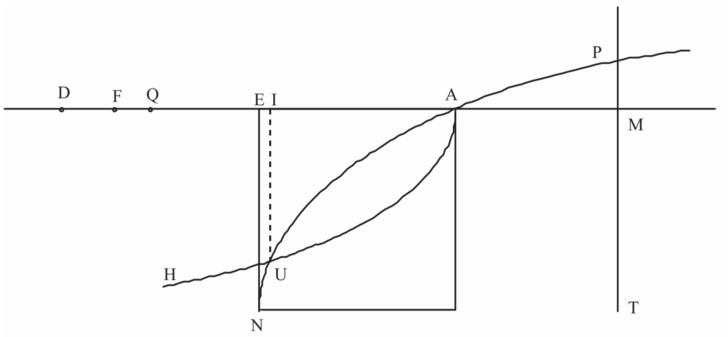
$$\frac{AS^2}{IU^2} = \frac{AS^2}{AP^2} = \frac{AE}{ME} \cdot \frac{AM}{MT} = \frac{AE}{ME} \cdot \frac{ME}{EQ} = \frac{AE}{EQ} = \frac{g^2}{h^2}،$$

فنستنتج أنَّ : $\frac{g}{h} = \frac{AS}{AP}$، ولكنَّ $KB \, // AS$ تؤدِّي إلى: $\frac{AS}{AP} = \frac{BK}{AK}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{g}{h} = \frac{BK}{KA}$.

لنقم بالمناقشة في الحالة التي يكون فيها Γ قطعاً ناقصاً ذا محور أعظم DA. يكون MA محور القطع الزائد $\mathcal{H}$ ويكون TM ضلعه القائم (نأخذ فرعَه ذا الرأس A). يكون معنا:

$\frac{AM}{MT} = \frac{ME}{EQ} = \frac{ME.AE}{EA.EQ}$. نحن نعلم أنَّ: $\frac{AE}{EQ} = \frac{g^2}{h^2}$ وأنَّ $g > h$ ، فيكون $QE < AE$.

يكون معنا إذاً: $EQ. \, EA < EA^2 = EN^2$، $\frac{AM}{MT} < \frac{ME.AE}{EN^2}$. يقطع Γ الخطَّ EN بين E وَ N.



الشكل ٤

إنَّ للقطعين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ محورين متوازيين وتقعُّرين متخالفين، والنقطة A هي نقطة تقاطع بينهما، فيقطع $\mathcal{H}$ إذاً القوس $\widehat{AN}$ من القطع المكافئ على النقطة U، وتكون U بين A وَ N. وتكون النقطة I، مسقط U على المحور، بين A وَ E؛ فتكون النقطة F، التي تـُحقِّق

$IA = 2\ FA$ ، بين A وَ D؛ ويتوافق مع F نقطة، C، على القطع الناقص، فنحصل على النقطة B.

فتكون المسألة قابلة دائماً للحلّ.

٥- المناقشة في الحالة التي يكون فيها Γ قطعاً زائداً ذا محور مُجانب DA؛ نتناول فرعه Γ_A ذا الرأس A. تقَع النقطة M بين A وَ D. ولتكن B نقطة على امتداد DA المستقيم بحيث يكون: $AB^2 = 2AM\ .\ AD$.

يكون لدينا الشرط التالي لإمكانية حلّ المسألة: $\frac{2AD+2AM+3AB}{ME} \geq \frac{g^2}{h^2}$.

لنأخذ النقطة S، على القطع المكافئ $\mathcal{P}$، بحيث يكون $AS \perp NO$، ولنأخذ U نقطة تقاطع بين SB وَ $\mathcal{P}$. ولكنَّ U تسقط في I على DA، وفي O على محور $\mathcal{P}$ وفي V على الخطّ الموازي للمحور الخارج من S.

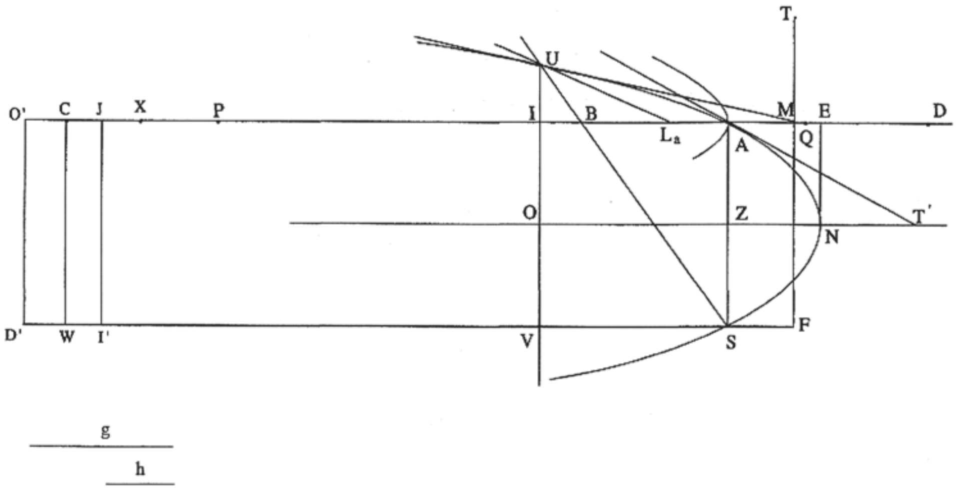
يكون معنا: $EA^2 = IO^2$ ، $IO^2 + EA\ .\ AI = EA^2 + EA\ .\ AI = EA\ .\ NO = UO^2$،

$UV.\ UI = (UO + OI)\ .\ UI = UO^2 - IO^2 = EA\ .\ AI$ وَ $\frac{EA}{UI} = \frac{UV}{AI} = \frac{UV}{VS} = \frac{UI}{BI}$.

فنحصل على: $UI^2 = EA\ .\ BI$.

ويكون معنا أيضاً: $\frac{SA}{AB} = \frac{UI}{BI}$، فنحصل على: $UI\ .\ AB = 2EA\ .\ BI$، فيكون بالتالي: $AB = 2UI$، فنحصل على: $AB^2 = AM\ .\ AD$ $\frac{1}{2}$ $SA\ .\ BI =$ ؛ ولكنَّ $SA = AD$ ، فنحصل على $BI = AM$.

لنأخذ النقطتين P وَ C اللتين تُحقّــقّان $2AD = IP$ و $2AB = PC$ ، فيكون معنا عندئذ: $2AD + 2AM + 3AB = CM$. فيُصبح الشرط الذي وضعناه: $\frac{CM}{ME} \geq \frac{G^2}{H^2}$.



الشكل ٥-١

ا) لنفترض أنَّ: $\frac{g^2}{h^2} = \frac{CM}{ME}$، فيكون: $\frac{CM}{ME} = \frac{AE}{EQ}$.

ليكن X وسط PC؛ فيكون معنا:

$2UI = AB = PX$ ، $2VI = 2AD = PI$ ، $2UV = XI$ ، $2VU \,.\, UI = XI \,.\, UI$

ولكنَّ: $VU \,.\, UI = UO^2 - OI^2 = EA \,.\, AI = VI \,.\, AI \frac{1}{2}$ ، فإذاً:

$(*)$ $VI \,.\, AI = XI \,.\, UI$.

ويكون معنا، من جهة أخرى، $CX = AB = 2UI$، فنحصل على

$CX \,.\, IU = AB \,.\, UI = 2UI^2 = 2AE \,.\, BI$ ، $VI \,.\, AM = CX \,.\, IU$.

فنستنتج، باستخدام $(*)$، أنَّ: $CI \,.\, IU = VI \,.\, MI$ ، فيكون: $\frac{VI}{IU} = \frac{CI}{IM}$ وَ $\frac{VU}{UI} = \frac{CM}{MI}$.

ولكنَّ: $\frac{MI}{AE} \cdot \frac{CM}{MI} = \frac{CM}{AE}$، ومعنا أيضاً: $\frac{MI.IA}{UV.UI} = \frac{MI.IA}{IA.AE} = \frac{MI}{AE}$ وَ $\frac{UV.UI}{UI^2} = \frac{UV}{UI} = \frac{CM}{MI}$،

فنحصل على: $\frac{MI.IA}{UI^2} = \frac{CM}{AE}$.

إنَّ لدينا، وفقاً للفرضيات: $\frac{CM}{AE} = \frac{ME}{EQ} = \frac{AM}{MT}$، فنحصل على: $\frac{AM}{MT} = \frac{MI.IA}{UI^2}$؛ تعني هذه العلاقة أنَّ U تقع على القطع الزائد $\mathcal{H}$ ذي المحور MA والضلع القائم TM. فإذا كان $\frac{g^2}{h^2} = \frac{CM}{ME}$، تكون U عندئذ نقطة مشترَكة بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، فيكون للمسألة حلٌّ واحدٌ على الأقلّ.

لنبيِّن أنَّ هناك حلاً ثانياً.

ليكن AT' الخطّ المماسّ للقطع المكافئ في النقطة A، وليكن Z وسط SA، فيكون معنا: $ZT' = 2ZN = 2AZ$. لنرسم UL_a بحيث يكون $UL_a // AT'$، وحيث تكون L_a نقطة على الخطّ IA؛ والمثلّثان UIL_a وَ AZT' متشابهان، فيكون إذاً $IL_a = 2UI = AB$ ؛ فيكون عندئذ $IB = AL_a = AM$، وبالتالي يكون الخطّ MU مماسّاً للقطع المكافئ في النقطة U.

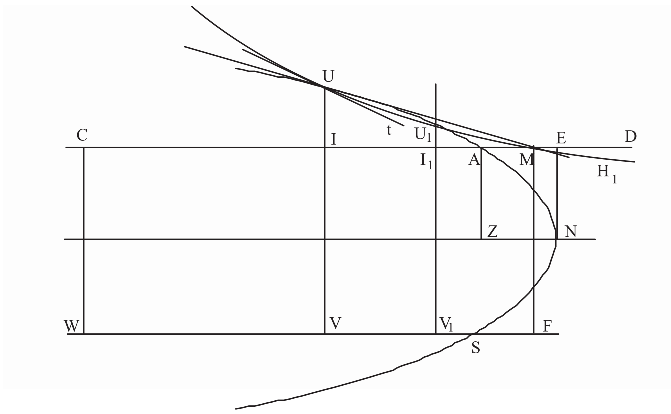
ولنرسم الخطَّين WC وَ FM العموديين على SV. نستنتج من المعادلة $\frac{VU}{UI} = \frac{CM}{MI}$، بالتتابع: $\frac{UV}{VI} = \frac{MC}{CI}$، $CI . UV = CM . IV$ وَ $VW . UV = CM . MF$ ؛

وهذه المعادلة الأخيرة تعني أنَّ القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ ، ذا الخطَّين المقارَبين المتعامدين CW وَ FW، والذي يمرُّ بالنقطة M ، يمرُّ أيضاً بالنقطة U. يوجد الخطُّ UM داخل هذا القطع الزائد ولكنَّ الخطَّ MU مماسٌّ للقطع المكافئ؛ فكلُّ خطّ خارجٍ من U وموجود بين UM والخطّ المماسّ للقطع الزائد يمرُّ إذاً داخل القطع المكافئ، ويقطع في آن واحد القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ والقطع المكافئ $\mathcal{P}$ ؛ فإذاً $\mathcal{H}_1$ يقطع $\mathcal{P}$ على نقطة بين A وَ U. لتكن U_1 هذه النقطة.

نـُرفِق بهذه النقطة U_1 الموجودة على $\mathcal{H}_1$، نقطتين I_1 وَ V_1؛ يكون معنا:

$CM . MF = CI_1 . U_1V_1$، ولكنَّ $I_1V_1 = MF$ ، فنستنتج أنَّ $\frac{U_1V_1}{I_1V_1} = \frac{CM}{CI_1}$.

وإذا فعلنا بالنسبة إلى النقطة U_1 ما فعلناه بالنسبة إلى النقطة U (انظر أعلاه ص ٧٩-٨٠)، نـُبيِّن أنَّ:



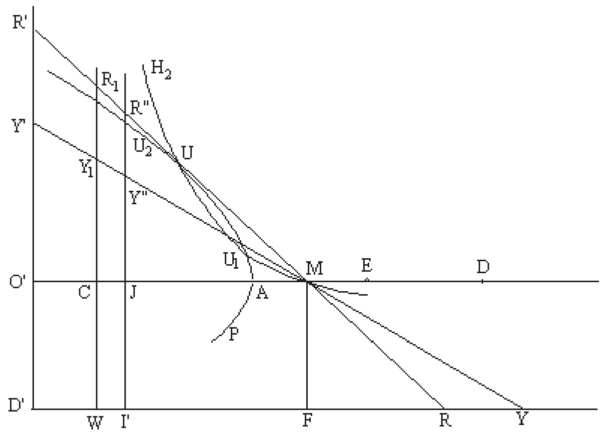
الشكل ٥ـ٢

(الخطُّ UM مماسّ لِـ $\mathcal{P}$، الخطُّ Ut مماسّ لِـ $\mathcal{H}_1$)

$\frac{AM}{MT} = \frac{MI_1 . AI_1}{U_1 I_1^2}$، فتكون النقطة U_1 على القطع الزائد $\mathcal{H}$.

يقطع القطعُ الزائد $\mathcal{H}$ القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ على نقطتين U_1 و U مُختلفتين عن النقطة A. وهاتان النقطتان U_1 و U تسقطان على امتداد AD المستقيم، بعد A؛ وهما تتوافقان مع نقطتين على فرع القطع الزائد المعلوم Γ_A (ومع النقطتين المتناظرتين مع النقطتين الأخيرتين بالنسبة إلى الخطّ AD)؛ ويكون الخطّ المماس على Γ_A في كلٍّ من هاتين النقطتين مُحقــِّقاً للخاصّة المطلوبة.

ب) لنفترِض أنَّ: $\frac{CM}{ME} > \frac{g^2}{h^2}$، وليكن $\frac{O'M}{ME} = \frac{g^2}{h^2}$ مع $O'M > CM$. ليكن $O'D'$ بحيث يكون $FW \perp O'D'$.



الشكل ٥ـ٣

الخطُّ المُماسّ في M للقطع الزائد $\mathcal{H}_1$، ذو الخطَّين المقاربَين المتعامدين، يقطع الخطَّين المقاربَين WF وَ WC على النقطتين Y وَ Y_1، ويقطع الخطَّ $O'D'$ على النقطة Y'؛ ويقطع الخطُّ UM، الذي يصل بين نقطتين من $\mathcal{H}_1$، هذه الخطوطَ الثلاثة بالترتيب على R وَ R_1 وَ R' ؛ ويكون معنا:

$MY = MY_1$ (خاصّة خطّ التماسّ)، $MR = MR_1$ (خاصّة الخطّ القاطع UM).

يكون معنا إذاً: $MY' > MY$ وَ $UR' > MR$.

القطعُ الزائد $\mathcal{H}_2$، ذو الخطَّين المقاربَين المتعامدين $O'D'$ وَ FD' ، يقطع الخطَّ MY على نقطة من MY' ويقطع الخطّ MU على نقطة من UR'. ويقطع الخطُّ $Y'Y$ القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ ؛ ويقطع القطعُ الزائد $\mathcal{H}_2$ ، الذي يمرُّ بالنقطة M، القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ على نقطتين: الأولى U_1 بين A و U والثانية U_2 ما بعد U. ونُبيِّن أنَّ U_1 وَ U_2 تقعان على القطع الزائد $\mathcal{H}$، ونعمل كما فعلنا في الحالة السابقة مع إبدال MC بـِ MO'.

هاتان النقطتان U_1 وَ U_2 تتوافقان مع نقطتين على فرع القطع الزائد المعلوم Γ_A (ومع النقطتين المتناظرتين مع النقطتين الأخيرتين)؛ ويكون الخطّ المماسّ على Γ_A في كلٍّ من هاتين النقطتين مُحقـِّقاً للخاصّة المطلوبة.

جـ) لنفترِض أنَّ: $\frac{g^2}{h^2} < \frac{CM}{ME}$، ولتكن النقطة J بحيث تتحقَّق المعادلة $\frac{g^2}{h^2} = \frac{JM}{ME}$ ، فيكون معنا $CM > JM$.

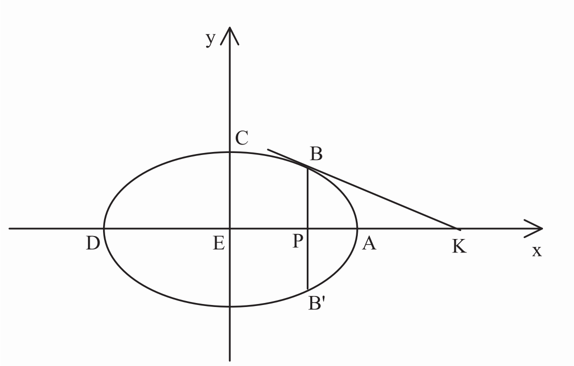
يقطع الخطُّ، الخارج من J عمودياً على CM، الخطَّ FW والخطّ المماسّ YM، وفقَ الترتيب، على النقطتين I' وَ Y''؛ ويكون معنا: $MY'' < MY$.

القطع الزائد $\mathcal{H}_3$ الذي يمرُّ بالنقطة M والذي يكون $I'J$ وَ $I'F$ خطّيه المقاربَين، يقطع من جديد الخطّ MY على نقطة بين M وَ Y؛ فهو لا يقطع إذاً القطع المكافئ $\mathcal{P}$.

دراسة تحليلية كاملة، مستقلّة عن الطريقة التي اتبعها ابن الهيثم، للقضايا ٣ وَ ٤ وَ ٥

١ - حالة القطع الناقص ذي المحور DA. لنضع $d = DA$، a = الضلع القائم المُرفق بـِ DA وَ $k = \frac{d}{a}$.

المطلوب هو إيجاد نقطة B بحيث يُحقّق خطّ التماسّ KB المعادلة $\frac{BK}{KA} = \frac{g}{h}$ مع $\frac{g}{h} > 1$.



الشكل ٥-٤

تُكتَب معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى محوريْه:

$$x^2 + k.y^2 = \frac{d^2}{4} . \qquad (١)$$

ليكن $B(x, y)$ مع $0 < x < \frac{d}{2}$ ؛ يكون معنا، وفقاً لخواص خطّ التماسّ، $\overline{EP}.\overline{EK} = \frac{d^2}{4}$، فيكون $\overline{EK} = \frac{d^2}{4x}$ مع $(x \neq 0)$، $\frac{\overline{EP}.\overline{PK}}{PB^2} = \frac{d}{a}$، فيكون $\overline{PK} = \frac{dy^2}{ax}$. نستنتج من ذلك أنَّ:

$\overline{AK} = \overline{EK} - \overline{EA} = \frac{d}{2x}\left(\frac{d}{2} - x\right)$ وَ $BK^2 = BP^2 + PK^2 = y^2 + \frac{d^2}{a^2}.\frac{y^4}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}\left[x^2 + k^2y^2\right]$.

يكون معنا إذاً: $\frac{BK^2}{KA^2} = \frac{g^2}{h^2} = \frac{4y^2}{d^2}.\frac{x^2 + k^2y^2}{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2}$. ولكن، وفقاً للمعادَلة (١)، $y^2 = \frac{1}{k}\left(\frac{d^2}{4} - x^2\right)$،

فيكون معنا، إذاً، مع الافتراض أنَّ $B \neq A$، أيْ $x \neq \frac{d}{2}$: $\frac{g^2}{h^2} = \frac{4}{kd^2}.\frac{\frac{d}{2} + x}{\frac{d}{2} - x}.[x^2(1-k) + k\frac{d^2}{4}]$.

إذا كانت النقطة B تُحقــِّق الشروط المطلوبة في المسألة، فإنَّ إحداثيّتها الأولى تحقّق المعادلة: $4.\left(\frac{d}{2}+x\right).[x^2(1-k)+k\frac{d^2}{4}]-\frac{g^2}{h^2}.kd^2\left(\frac{d}{2}-x\right)=0$.

تُكتَب هذه المعادلة على الشكل التالي:

$$f(x)=4.x^3(1-k)+2dx^2(1-k)+kd^2x\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)+k\frac{d^3}{2}\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)=0\,.$$

– إذا كان $k = 1$، يُصبح القطع الناقص دائرة. وتُصبِح المعادلة $f(x)=0$ من الدرجة الأولى؛ فيكون جذرها: $x_0=\frac{d}{2}.\frac{\frac{g^2}{h^2}-1}{\frac{g^2}{h^2}+1}$ ، $1<\frac{g}{h} \Leftarrow 0<x_0<\frac{d}{2}$.

يكون عندئذ للمسألة حلٌّ. ويُمكن، إنـّه من الواضح، أن نقوم بالبناء بواسطة المسطرة والبركار. ولا يتناول ابن الهيثم هذه الحالة الخاصَّة، إذ إنـّه لم يكن يُعالج إلا القطوع المخروطية . ولنذكِّر أنَّ الدائرة لم تـُعتبَر كقطع مخروطيّ إلا بعد أن أصبحت تـُعرَّف بواسطة مُعادلاتها.

- إذا كان $k \neq 1$، يكون معنا: $f(0)=\frac{kd^3}{2}\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)$ وَ $0<d^3=f(\frac{d}{2})$؛

وكذلك: إذا كان $x \longrightarrow \pm\infty$ ، يكون: $f(x) \cong 4x^3(1-k)$.

- إذا كان $k > 1$، يكون معنا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

فيكون للمعادلة $f(x) = 0$، ثلاثة جذور x_1، x_2، x_3، مع: $x_1<0$ ، $0<x_2<\frac{d}{2}$، $x_3>\frac{d}{2}$؛

فنستنتج أنَّ الجذرَ x_2 وحده مقبولٌ.

- إذا كان $k < 1$، يكون معنا: $f'(x)=12(1-k).x^2+4d(1-k).x+kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)$.

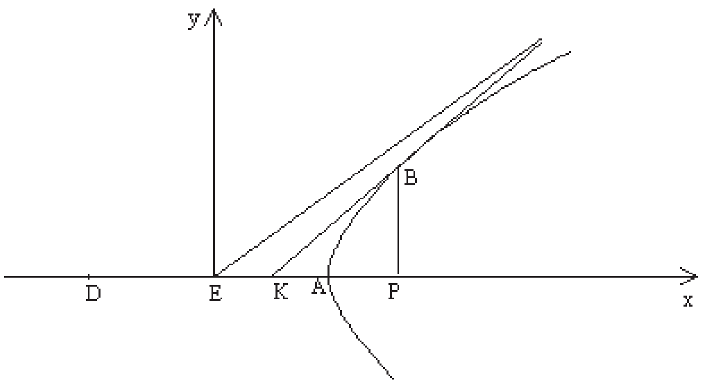
يبقى هذا المتعدِّد الحدود من الدرجة الثانية موجباً إذا كان $x \le 0$، فتكون الدالّة f تزايديّة في هذه الفسحة، ويكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذرٌ وحيدٌ في الفسحة $]0, \frac{d}{2}[$.

وهكذا يكون للمسألة حلٌّ وحيدٌ، مهما كان القطع الناقص المعلوم، إذا كان $\frac{g}{h} > 1$. وتبقى هذه المناقشة صالحة في الحالة التي لم يتناولها ابن الهيثم، حيث يكون DA المحور الأصغر للقطع الناقص. ويكون القطعُ المخروطيّ المساعِد، الذي يُستخْدَم في هذه الحالة، قطعاً ناقصاً وليس قطعاً زائداً (انظر الحاشية ٣، ص. ٧٦).

٢- حالة القطع الزائد ذي المحور المجانب DA. لنضع $d = DA$، و $k = \frac{d}{a}$.

تُكتَب معادلة القطع الزائد: $x^2 - ky^2 = \frac{d^2}{4}$.

ليكن معنا $B(x, y)$ مع $x > \frac{d}{2}$ ؛ ، وليكن KB خط التماسّ في B: $\overline{EP}.\overline{EK} = \frac{d^2}{4}$، فيكون



الشكل ٥-٥

$\overline{EK} = \frac{d^2}{4x}$، $0 < \overline{EK} < \frac{d}{2}$، $\overline{AK} = \overline{EK} - \overline{EA} = \frac{d}{2x}\left(\frac{d}{2} - x\right)$، $\overline{AK} < 0$، $\frac{\overline{PE}.\overline{PK}}{PB^2} = \frac{d}{a} = k$،

فيكون $\overline{KP} = k\frac{y^2}{x}$، $BK^2 = PK^2 + PB^2 = \frac{y^2}{x^2}\left[x^2 + k^2y^2\right]$، $\frac{BK^2}{AK^2} = \frac{g^2}{h^2} = \frac{4y^2}{d^2}.\frac{x^2 + k^2y^2}{\left(1 - \frac{d}{2}\right)^2}$،

ولكنَّ $y^2 = \frac{1}{k}\left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right)$ ، فنحصل، إذا افترضنا أنَّ $A \neq B$، أيْ $x \neq \frac{d}{2}$، على

$\frac{g^2}{h^2} = \frac{4}{kd^2} \cdot \frac{x+\frac{d}{2}}{x-\frac{d}{2}} \cdot [x^2(1+k) - k\frac{d^2}{4}]$ ، فيكون:

$f(x) = 4\left(x+\frac{d}{2}\right)[x^2(1+k) - k\frac{d^2}{4}] - kd^2\frac{g^2}{h^2}\left(x-\frac{d}{2}\right) = 0$ ،

$f(0) = \frac{kd^3}{2}\left(\frac{g^2}{h^2} - 1\right) > 0$ ، $f\left(\frac{d}{2}\right) = d^3 > 0$ ؛

وكذلك إذا كان $x \to \pm\infty$ ، يكون: $f(x) \cong 4x^3(1+k)$ ، فيكون إذاً:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

فيكون للمعادلة $f(x) = 0$، جذران موجودان في الفسحة $]\frac{d}{2}, +\infty[$.

وتُكتَب المعادلة على الشكل التالي:

$$(\alpha) = f(x) = 4x^3(1+k) + 2d(1+k)x^2 - kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)x + \frac{kd^3}{2}\left(\frac{g^2}{h^2} - 1\right) = 0 .$$

فيكون معنا: $(\beta) = f'(x) = 12x^2(1+k) + 4d(1+k)x - kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)$.

يكون للمعادلة $f'(x) = 0$ جذران، x'' وَ x'، مُتَضادّا الإشارة. فنحصل على لوحة التغيُّرات التالية:

x	$-\infty$		x'		0		x''		$+\infty$
$f'(x)$		+	0		-		0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	M		↘		m	↗	$+\infty$

الحدُّ الأقصى M موجِبٌ لأنَّ $0 < f(0) < M$؛ فيكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذرٌ x_1، مع $x_1 < x' < 0$. أمّا وجود الجذرين الآخرين، فإنّــه يتعلّق بإشارة الحدّ الأدنى m. والشرطان الضروريان والكافيان لكي يكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذرٌ مزدوِجٌ أو جذران بسيطان في الفسحة $]\frac{d}{2},+\infty[$، هما: ١) $x'' > \frac{d}{2}$ وَ ٢) $m = f(x) \leq 0$.

يعني الشرط الأوّل، $x'' > \frac{d}{2}$، أنَّ $\frac{d}{2}$ موجود بين جذريْ $f'(x)$: x'' وَ x'، أيْ أنَّ: $f'(\frac{d}{2})<0$. يكون معنا: $f'\left(\frac{d}{2}\right)=5d^2(1+k)-kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)=d^2\left(5+4k-k\frac{g^2}{h^2}\right)$.

فيُكتَب هذا الشرط على الشكل التالي:

$$k\frac{g^2}{h^2}>5+4k \Leftrightarrow \frac{g^2}{h^2}>\frac{5+4k}{k} \qquad (١)$$

لنفرض أنَّ: $\frac{5}{k}<\frac{g^2}{h^2}-4$. يُعادل الشرط الثاني المتباينة $Mm \leq 0$، لأنَّ $M > 0$؛ أمّا Mm فهو لا يختلف عن مُمَيِّز المعادلة إلا بمُعامِل عدديّ موجب. ونحن نحسبه بواسطة باقي قسمة f على f'؛ يساوي هذا الباقي: $\frac{d^2(\lambda x+\mu)}{9}=\frac{kd^3}{9}\left(5\frac{g^2}{h^2}-4\right)+\left(3k\frac{g^2}{h^2}+4k+1\right)\frac{2d^2x}{9}-$

مع $\lambda = -2\left(3k\frac{g^2}{h^2}+4k+1\right)$ وَ $\mu = kd\left(5\frac{g^2}{h^2}-4\right)$.

فيكون معنا إذاً: $M=\frac{d^2}{9}(\lambda x'+\mu)$ ، $m=\frac{d^2}{9}(\lambda x''+\mu)$

وَ $Mm=\frac{d^4}{81}\left(\lambda^2x'x''+\lambda\mu(x'+x'')+\mu^2\right)$، حيث يكون: $x'x''=-\frac{kd^2}{12(1+k)}\left(\frac{g^2}{h^2}+1\right)$ وَ $x'+x''=-\frac{d}{3}$، وفقاً للمعادلة (β). وهكذا نحصل على:

$$(\gamma) = \lambda^2x'x''+\lambda\mu(x'+x'')+\mu^2=$$

$$\frac{3kd^2}{1+k}\left(-k^2\frac{g^6}{h^6}+8k^2\frac{g^4}{h^4}-16k^2\frac{g^2}{h^2}+11k\frac{g^4}{h^4}-12k\frac{g^2}{h^2}+\frac{g^2}{h^2}-1\right)$$

$$= \frac{3kd^2}{1+k}\left(-k^2\frac{g^2}{h^2}\left(\frac{g^2}{h^2}-4\right)^2 + k\frac{g^2}{h^2}\left(11\frac{g^2}{h^2}-12\right)+\frac{g^2}{h^2}-1\right).$$

لقد رسمنا الشكل بعد أن تبنَّينا الإحداثيتين: $x=\frac{k}{10}$ وَ $y=\frac{g^2}{h^2}-4$ ؛ وإذا استخدمنا هاتين الإحداثيتين، تُكتَب المتباينة التالية التي تُعبِّر عن الشرط الثاني، على الشكل التالي:

$$(\gamma')\ = -100x^2y^2(y+4)+10x(y+4)(11y+32)+y+3 \le 0،$$

بينما يُكتَب الشرط الأوَّل $y > \frac{1}{2x}$. وهذا ما يُعادِل $x > \frac{1}{2y}$ ، إذا كان $0 < y$. ولكن ، إذا جعلنا x مساوياً لِـ $\frac{1}{2y}$ في متباينة (γ') ، نحصل على: $10(y+4)\left(3+\frac{16}{y}\right)+y+3>0$، وهذا يعني أنَّ $\frac{1}{2y}$ توجَد بين جذري المعادلة (γ')، بينما تعني المتباينة (γ') أنَّ x خارجٌ عن الفسحة التي بين هذين الجذرين. وهكذا نرى أنَّ الشرطين مُعادلان لِـ :

١) $\frac{g}{h} > 2$،   ٢) $0 \le k^2\frac{g^2}{h^2}\left(\frac{g^2}{h^2}-4\right)^2 - k\frac{g^2}{h^2}\left(11\frac{g^2}{h^2}-12\right)-\frac{g^2}{h^2}+1$

يُكتَب الشرط الذي قدَّمه ابن الهيثم على الشكل التالي: $\frac{g^2}{h^2} \ge 4+\frac{6}{k}\left(1+\sqrt{1+k}\right)$، لأنَّ

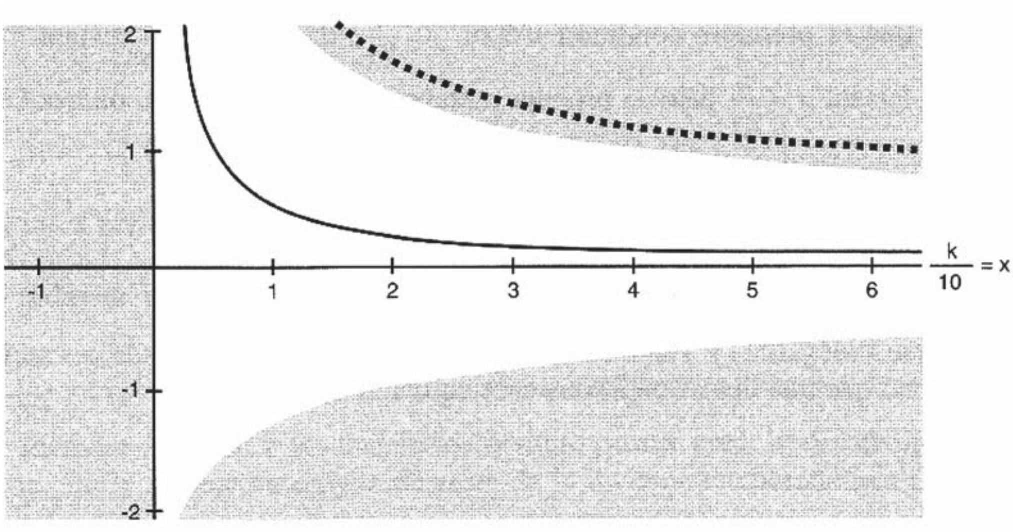
$ME = \frac{kd}{2(1+k)}$ ، $AM = \frac{d}{2(1+k)}$ وَ $AB = \frac{d}{\sqrt{1+k}}$.

وإذا استخدمنا الإحداثيتين x و y ، يُكتَب هذا الشرط كما يلي:

$$y \ge \frac{3}{5x}\left(1+\sqrt{1+10x}\right)،\quad \text{أيْ:}\quad x \ge \frac{6}{5y}\left(1+\frac{3}{y}\right).$$

وإذا جعلنا في (γ') : $x = \frac{6}{5y}\left(1+\frac{3}{y}\right)$ ، نحصل على: $-\frac{y+3}{y^2}\left(11y^2+8\times 12y+16\times 12\right)<0$.

وهذا يُبيِّن أنَّ الشرطين الضروريين والكافيين ١ وَ ٢ يتضمَّنان شرط ابن الهيثم الذي يكون إذاً كافياً فقط.



الشكل ٥-٦

$y = 4 - \frac{g^2}{h^2}$ ؛ المناطق الرمادية في الشكل هي المناطق المقبولة المُحدَّدة بالمتباينة (γ)؛

الخط المنحني المتواصل محدَّد بالمعادلة $\frac{5}{k} = 4 - \frac{g^2}{h^2}$ أو $2yx = 1$؛

الخط المنحني المتقطع محدَّد بالمعادلة $\frac{6}{k}\left(1+\sqrt{1+k}\right) = 4 - \frac{g^2}{h^2}$ ؛

والمنطقة المقبولة وفقاً لشرط ابن الهيثم هي التي فوق هذا الخط المنحني.

يُمكننا أن نرى ببساطة أنَّ شرط إمكان حلّ المسألة يُعبَّر عنه بكون النسبة $\frac{g}{h}$ أكبر من حدٍّ أدنى متعلّق بـِ k، أو مساوية لهذا الحدّ. تساوي النسبة $\frac{BK^2}{AK^2}$ بالفعل:

$\frac{4}{kd^2} \cdot \frac{x+\frac{d}{2}}{x-\frac{d}{2}}\left(x^2(1+k) - \frac{kd^2}{4}\right)$. فلندرس تغيُّر هذه العبارة عندما يتغيَّر x من $\frac{d}{2}$ إلى $+\infty$.

تُكتَب مُشتقَّتها كما يلي:

$$\frac{4}{kd^2} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\left(-dx^2(1+k) + \frac{kd^2}{4} + 2x(1+k)\left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{kd^2} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\left(2x^3(1+k) - dx^2(1+k) - \frac{d^2x}{2}(1+k) + \frac{kd^3}{4}\right)$$

فتكون إشارة هذه المشتقّة مطابقة لإشارة متعدِّد الحدود من الدرجة الثالثة الموجود بين قوسين؛ مشتقَّة متعدِّد الحدود هذا هي:

$$6x^2(1+k)-2dx(1+k)-\frac{d^2}{2}(1+k)=6(1+k)\left(x-\frac{d}{2}\right)\left(x+\frac{d}{6}\right)،$$

وهي موجبة عندما يكون $\frac{d}{2}\le x$، فيكون متعدِّد الحدود تزايديّاً في الفسحة $[-\frac{d^3}{4},+\infty[$ ولا تتغيَّر إشارته إلا مرّة واحدة عندما يكون x مساوياً لـِ x_0 التي هي القيمة الموافقة لحدّ $\frac{BK^2}{AK^2}$ الأدنى.

x	$\frac{d}{2}$	x_0	$+\infty$
$\frac{BK^2}{AK^2}$	$+\infty$ ↘	الحدّ الأدنى	↗ $+\infty$

وهكذا يكون شرط إمكانية الحلّ:

$$\frac{4}{kd^2}\cdot\frac{x_0+\frac{d}{2}}{x_0-\frac{d}{2}}\left(x_0^2(1+k)-\frac{kd^2}{4}\right)\le\frac{g^2}{h^2}، \qquad (*)$$

حيث تكون x_0 مُحدَّدة بالشرطين:

أ) $\frac{d}{2}<x_0$ ، ب) $0=2(1+k)x_0^3-d(1+k)x_0^2-\frac{d^2(1+k)}{2}x_0+\frac{kd^3}{4}$.

إذا أخذنا بعين الاعتبار هذه المعادلة الأخيرة، يُمكن أيضاً أن نكتب الحدّ الأدنى لـِ $\frac{g^2}{h^2}$ كما يلي: $\frac{8(1+k)}{kd^3}x_0\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2$.

لنلاحظ أنّ لدينا، بفضل $\frac{d}{2}<x_0$: $4+\frac{4}{k}=4\frac{1+k}{k}<\frac{8(1+k)}{kd^3}x_0\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2$ ؛

فنحصل خاصّة على $\frac{g}{h}>2$. وإذا استخدمنا $(*)$ وَ ب) يُمكن أن نحصل على (γ).

تستند المناقشة التي يقترحها ابن الهيثم على فكرة إبدال القطع الزائد $\mathcal{H}$ بالقطع الزائد $\mathcal{H}_1$، ذي الخطَّين المقارَبين المتعامدين، والذي ينتمي إلى حزمة القطوع المخروطية المولّدة من $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$. وقد تـصبِح هذه المناقشة كاملة إذا حدَّدنا شرط التماسّ بين $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}_1$ ولكنَّ الحصولَ على هذا الشرط صعبٌ، كما تـظهِر ذلك المناقشة التحليلية، إذ تدخُل فيها معادلة من الدرجة الثالثة للمتغيِّر $\frac{g^2}{h^2}$، وهذا ما يجعلها إذاً على تخوم رياضيّات ذلك العصر. وهكذا يُمكن أن يكون ابن الهيثم قد اكتفى بمناقشة غير كاملة بسبب هذه الصعوبة. ولنلاحظ أنَّ ابن الهيثم قد لمَّح، كما يبدو، إلى هذه الصعوبة: فهو يكتب: "أمّا في القطع الناقص، فإنَّ المسألة تتمُّ على جميع الأحوال"، بينما يقول "فأمّا القطع الزائد فإنَّ المسألة ليس تتمُّ فيه إلا بشرط وبتخصيص". وهو يشرح الشرط بدون أن يشرح التخصيص.

إنَّ تَمَيُّز المناقشة بهذا النقص، الذي يُمكِن أن يُذكِّر بخطأ من النوع نفسه ارتكبه أبو الجود وكشفه الخيّام، يبقى مدهِشاً لدى مؤلف من هذا المستوى. يجب، على كلِّ حال، أن نستبعِد تعليل النسبة كأنَّها قيمة عددية تقريبية للحدّ الحقيقيّ؛ وذلك أنَّ السياق الرياضي لهذا البحث هندسيٌّ محض، ولا يُمكنه أن يأخذ بعين الاعتبار إلا القِيَم الصحيحة.

ويَدخل خطّ التماسّ CM للقطع المكافئ (الذي لا يتعلّق بالنسبة $\frac{g}{h}$) بشكل طبيعيّ؛ ولا يُمكِن أن نتصوَّر أنَّ ابن الهيثم قد خلط بينه وبين خطّ تماس للقطع الزائد.

إنَّ التحديدات، بشكل عامّ، ترتكز في هذه المسائل على إثبات وجود التقاطع بين قطعيْن مخروطييْن؛ والحالة الحدِّية، التي تفصل بين وجود التقاطع وعدم وجوده، هي التي يكون فيها القطعان المخروطيان في وضع التماسّ؛ وهذا ما نراه بوضوح في كتاب ابن الهيثم هذا وفي أعمال أخرى له (كتاب "المعلومات") وكذلك عند أسلافه العرب واليونان (شرح أوطوقيوس لكتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس، والمقالة الخامسة لأبلونيوس). إنَّ القيام بالمناقشة الكاملة يتطلّب معرفة تحديد نقطة تماسّ القطعيْن المخروطيّيْن. ويبدو أنَّ هذا التحديد صعب المنال هندسياً في هذه الحالة. ولنلاحظ ما يُمَيِّز ابن الهيثم ، على ما يبدو، عن أسلافه بخصوص هذا الأمر:

- أصبح البحث المنهجي لحلول مسائل الأعمال الهندسية، باستخدام تقاطع القطوع

المخروطية، فصلاً كاملاً مستقِلاً في الهندسة. لم يَعُد يتعلّق الأمر بمسائل معزولة تظهر بشكل متقطّع فيتمّ حلّها بتقاطع القطوع المخروطية، بل بطريقة لاستكشاف ميدان المسائل الخاصّة في أغلبها بالمجسَّمات، وفي بعضها بالتربيعات.

- يدرس ابن الهيثم، في إطار هذا الفصل الجديد، بعناية بشكل عامّ، وجود الحلول وعددها، وفقاً لنظريته في التحليل والتركيب.

ترتكز هذه الدراسة على خواصّ الخطوط المقارَبة والخواصّ الموضعية للقطوع المخروطية، المتعلقة بشكل خاصّ بنقاط تماسّها.

ترتكز النظرية الجبرية التي بسطها شرف الدين الطوسي بالتأكيد على هذا النوع من الأعمال، ولكنَّها تتميَّز عنها تحديداً بأنَّ المناقشة أصبحت جبرية بشكل كامل. عالج شرف الدين الطوسي، أوّلاً، حالة المعادَلة $x^3 + c = ax^2$ ، حيث يكون التحديد مطابقاً لتحديد أوطوقيوس؛ ثمَّ أخذ بعين الاعتبار أنَّ الحلّين متناظران تقريباً، في جوار الحالة الحدّية، بالنسبة إلى الحلّ في الحالة الحدِّية، واستخدم طريقته الخاصَّة بانسحاب المتغيِّر المجهول" ليجد المعادلة المشتقَّة من الدرجة الثانية التي تسمح له بتحديد الحالة الحدّية لكلّ المعادلات الأخرى التي تجِب دراستها.

خلاصة المناقشة السابقة

لقد لاحظنا في أوَّل الأمر أنَّ ابن الهيثم يُميِّز حالة القطع الناقص، التي يكون للمسألة المطروحة فيها حلّ بشكل دائم، من حالة القطع الزائد التي تتطلّب شرطاً. ثمَّ يُدخل، في هذه الحالة، فكرة جديدة ترتكز على إبدال القطع الزائد $\mathcal{H}$ بقطع زائد آخر $\mathcal{H}_1$ تابع للزمرة المولّدة بـ $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$. يُمكِن أن نستخدِم هذه الفكرة بطريقة مُختلفة بإبدال $\mathcal{H}$ بقطع مكافئ آخر $\mathcal{P}'$ من الزمرة نفسها. لنلخِّص إذاً مسار ابن الهيثم في استخدام هذه الفكرة.

المطلوب هو إيجاد نقطة B على قطع مخروطي Γ (قطع ناقص أو زائد) ذي مركز E ومحور DA بحيث يقطع خطُّ التماسّ المحور على النقطة K وبحيث تـتـحـقـَّق المعادلة $\frac{BK}{KA} = \frac{g}{h}$، حيث تكون النسبة $\frac{g}{h}$ معلومة وأعظم من 1.

لنلاحظ أنــّـه، إذا كانت النقطة B حلاً للمسألة، فإنَّ النقطة B' المتناظرة معها بالنسبة إلى الخطّ DA هي أيضاً حلٌّ للمسألة. سنبحث إذاً عن B في نصف قطع مخروطيّ.

– يقوم ابن الهيثم في القضية الثالثة بتحليل هذه المسألة. ولا يتغيَّر الاستدلال مهما كان القطع المخروطيّ المعلوم (ناقصاً أم زائداً)، أي أنَّ النقطة M المحدَّدة بالمعادَلة $\frac{ME}{MA} = \frac{d}{a}$ (حيث يكون d القطر AD، ويكون a الضلع القائم) هي إمّا خارج الخطّ $[AD]$ في حالة القطع الناقص، أو بين A وَ D في حالة القطع الزائد.

وإذا وُجِد خطّ تماسّ KB يُحقــِّـق شروط المسألة، توجَد عندئذ في كلتا الحالتين نقطة U على القطع الزائد $\mathcal{H}$ وعلى نصف القطع المكافئ $\mathcal{P}$ المحدَّدين استناداً إلى المعطيات.

– يُبيِّن ابن الهيثم، في القضية الرابعة، أنــّـه إذا كانت U نقطة مُشترَكة لـِـ $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ فإنــَّـها تتوافق مع نقطة B على Γ وخطّ تماسّ KB يُحقــِّـق المعادلة $\frac{KB}{KA} = \frac{g}{h}$.

ولكنَّ دراسة التقاطع بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ تتطلّب مناقشة تؤدِّي إلى التمييز بين حالتين:

– حالة القطع الناقص في القضية الرابعة – حالة القطع الزائد في القضية الخامسة.

دراسة تحليلية للمناقشة: حيث يكون d المحور AD، ويكون a الضلع القائم المُرفق به.

حالة القطع الناقص. سنفرض $a < d$ فيكون $k = \frac{d}{a} > 1$، وذلك لنتتبع ابن الهيثم في دراسته.

لنأخذ A كنقطة أصل مع $A(0, 0)$ ، $D(0, d)$ ، $E\,(0,\frac{d}{2})$، $N\,(\frac{d}{2},-\frac{d}{2})$ ؛ تُحدَّد النقطة M بالمعادلة: $\frac{\overline{ME}}{\overline{MA}} = \frac{d}{a} = k$. فيكون $\frac{\overline{AE}}{d-a} = \frac{\overline{ME}-\overline{MA}}{d-a} = \frac{\overline{MA}}{a} = \frac{\overline{ME}}{d}$،

فنحصل على : $\lambda = \frac{d}{d-a} = \frac{\overline{ME}}{\overline{AE}}$ وَ $\overline{MA} = \frac{a.\overline{AE}}{d-a} = \frac{a.d}{2(d-a)} = \lambda.\frac{a}{2} = b$، مع $\lambda = \frac{k}{k-1}$.

معادلة $\mathcal{P}$: $\left(y+\frac{d}{2}\right)^2 = -\frac{d}{2}\left(x-\frac{d}{2}\right)$ وَ $0 < \frac{d}{2}+y$،

أو $y^2 + dy = -\frac{d}{2}.x$ وَ $0 < \frac{d}{2}+y$.

معادلة $\mathcal{H}$: الرأسان $A(0, 0)$، $M\left(-b=-\frac{a\lambda}{2},\ 0\right)$، $\frac{x(x+b)}{y^2}=\frac{g^2}{h^2}.\lambda$ أو $y^2=\frac{h^2}{\lambda g^2}x(x+b)$.

الإحداثية الأولى x، لأيّ نقطة تقاطع بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، هي جذر المعادلة التي نحصل عليها بعد حذف y^2 بين المعادلتين.

ويُمكِن أن نستخدِم، لدراسة التقاطع بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، أيَّ مزدوجة من قطعيْن مخروطيّيْن غير متطابقين من الزمرة $(\lambda.\ \mathcal{P}+\mu.\ \mathcal{H})$ المولدة من $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$. أمّا القطع المكافئ $\mathcal{P}'$، ذو المعادلة: $y=-\frac{x}{2}-\frac{h^2}{\lambda dg^2}x(x+b)$، التي نحصل عليها بعد حذف y^2، فهو يمرُّ بكلّ نقطة تقاطع U بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$.

ويمكن أن نقوم بدراسة $\mathcal{P}\cap\mathcal{H}$ عن طريق دراسة $\mathcal{P}'\cap\mathcal{P}$ ، حيث يكون:

محور $\mathcal{P}$ موازياً للخطّ xA، محور $\mathcal{P}'$ موازياً للخطّ yA، نقطة A مشتركة بين $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{P}'$.

وإذا حسبنا ظلَّ زاوية الانحدار لخطّ التماسّ في النقطة A على القطع المكافئ $\mathcal{P}$، نجد أنــّه يُساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$: $\left[2yy'+dy'=-\frac{d}{2},\ y=0\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}\right]$.

يقطع القطع المكافئ $\mathcal{P}'$ الخطّ Ox على النقطة A وعلى النقطة ذات الإحداثية الأولى:

$x=\frac{g^2}{h^2}.\frac{\lambda d}{2}-b>-b$، فتكون الإحداثية الأولى لرأسه سالبة، بينما تكون إحداثيته الثانية موجبة. يكون معنا: $y'=(2x+b)\frac{h^2}{d\lambda g^2}-\frac{1}{2}-$، وإذا جعلنا $x=0$، نحصل على

$y'=\frac{bh^2}{d\lambda g^2}-\frac{1}{2}-=\frac{ah^2}{2dg^2}-\frac{1}{2}->\frac{1}{2}-$.

يقطع القطع المكافئ $\mathcal{P}'$ القطع $\mathcal{P}$ على النقطة A، ويكون معنا في جوار A:

$\mathcal{P}'$ داخل $\mathcal{P}$ عندما يكون $x>0$، $\mathcal{P}'$ خارج $\mathcal{P}$ عندما يكون $x<0$.

يقطع $\mathcal{P}'$ إذاً بالضرورة $\mathcal{P}$ على نقطة U تكون إحداثيتها الأولى بين 0 وَ $\frac{d}{2}$، وعلى نقطة أخرى تكون إحداثيتها الأولى سالبة. ولكنَّ النقطة U هي وحدها التي نأخذها بعين الاعتبار.

لنلاحظ أنَّ النقطة الموجودة على القطع $\mathcal{P}$ والتي تساوي إحداثيتها الأولى $\frac{d}{2}$، لها إحداثية ثانية مساوية لِـ: $y=-\frac{d}{4}-\frac{h^2}{2\lambda g^2}(b+\frac{d}{2})$، ولكنَّ $b+\frac{d}{2}=\frac{d}{d-a}.\frac{a}{2}+\frac{d}{2}=\frac{d}{2}\left(1+\frac{a}{d-a}\right)=\frac{d}{2}\lambda$، فيكون $y=-\frac{d}{4}-\frac{dh^2}{4g^2}=-\frac{d}{4}\left(1+\frac{h^2}{g^2}\right)$، وهذا ما يُعطي $y<-\frac{d}{2}$، لأنَّ $\frac{g}{h}>1$.

الإحداثية الثانية للنقطة U أعظم، إذاً، من الإحداثية الثانية للنقطة N؛ فتكون النقطة U على $\widehat{AN}$ قوس القطع المكافئ $\mathcal{P}$، وتكون نقطة مقبولة لحلّ المسألة.

وتتوافق هذه النقطة U مع نقطة، B، موجودة على نصف القطع الناقص المعني بالأمر، والخطّ المماسّ في النقطة B يُشكّل حلاً للمسألة.

حالة القطع الزائد Γ: لا يتناول ابن الهيثم سوى الفرع Γ_A.

توجَد النقطة M بين A وَ E.

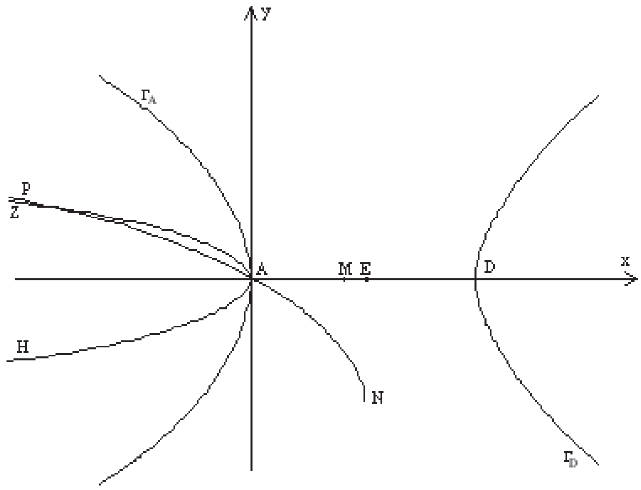
يكون معنا: $\frac{\overline{ME}}{\overline{MA}}=-\frac{d}{a}=-k$. فيكون $\frac{\overline{ME}}{d}=\frac{\overline{MA}}{-a}=\frac{\overline{ME}-\overline{MA}}{d+a}=\frac{\overline{AE}}{d+a}$،

فنحصل على: $\frac{\overline{ME}}{\overline{AE}}=\frac{d}{d+a}=\lambda'<1$ وَ $\overline{MA}=\frac{a.\overline{AE}}{d+a}=\frac{a.d}{2(d-a)}=-\lambda'.\frac{a}{2}=-b$، مع $\lambda'=\frac{k}{k+1}$.

يكون معنا، إذا استخدمنا نفس محوري الإحداثيات السابقين:

معادلة $\mathcal{P}$: $y^2+yd=-\frac{d}{2}x$، مع $[x<0, y>0]$ للقوس $\widehat{AZ}$ ؛

معادلة $\mathcal{H}$: الرأسان: $A(0, 0)$، $M(0, b)$ ؛ $\frac{x(x+b)}{y^2}=\lambda'\frac{g^2}{h^2}$ أو $y^2=\frac{h^2}{\lambda' g^2}x(x+b)$.



الشكل ٥ـ٧

التقاطع: تُحقّق كلُّ نقطة من نقاط التقاطع المعادلتين:

$\frac{h^2x(x-b)}{\lambda' g^2} = \frac{d.x}{2} - d.y -$ و $y = \frac{h^2x(x-b)}{d.\lambda' g^2} - \frac{x}{2} -$ ، وهذه الأخيرة هي معادلة قطع مكافئ $\mathcal{P}'$.

ترجع دراسة $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}$ إلى دراسة $\mathcal{P}' \cap \mathcal{P}$. يقطع الخطّ Ox على النقطة $A(x=0)$ وعلى النقطة A' ذات الإحداثية الأولى: $\alpha = b - \frac{d.\lambda' g^2}{2h^2} = b\left(1 - \frac{d.g^2}{a.h^2}\right) = b\left(1 - k\frac{g^2}{h^2}\right) > b$.

تساوي الإحداثية الأولى لرأس $\mathcal{P}'$، $\frac{\alpha}{2}$، بينما تكون إحداثيته الثانية موجبة.

ظِلّ زاوية التماسّ في A للقطع المكافئ $\mathcal{P}$: $y' = -\frac{1}{2}$؛

ظِلّ زاوية التماسّ في A للقطع المكافئ $\mathcal{P}'$: $y' = \frac{h^2(2x-b)}{d.\lambda' g^2} - \frac{1}{2}-$؛

فنستنتج، إذا جعلنا $x=0$: $y'(0) = \frac{b.h^2}{d.\lambda' g^2} + \frac{1}{2}- = \frac{a.h^2}{2d.g^2} + \frac{1}{2}- = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{k.g^2} - 1\right) < \frac{1}{2}-$ ،

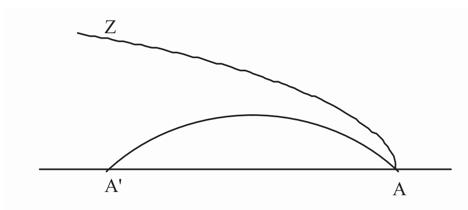
$y'(0) = \left(1 - \frac{kg^2}{.h^2}\right)\frac{h^2}{k.g^2}\frac{1}{2}$. فيكون لـ α و $y'(0)$ نفس إشارة $\left(1 - \frac{kg^2}{.h^2}\right)$.

إنَّه من الضروري، لكي تؤدِّي نقطة من $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ إلى حلّ، أن تكون هذه النقطة على القوس $\widehat{AZ}$ من $\mathcal{P}$ ؛ وهذا ما يتطلب $0 > \alpha$ أو $0 > y'(0)$ ، أي $\frac{1}{k} < \frac{g^2}{h^2}$.

يكون معنا عندئذ: $-\frac{1}{2} < y'(0) < 0$ ؛ فينفذ $\widehat{AA'}$ ، قوس القطع المكافئ $\mathcal{P}'$، من النقطة A إلى داخل القطع المكافئ $\mathcal{P}$.

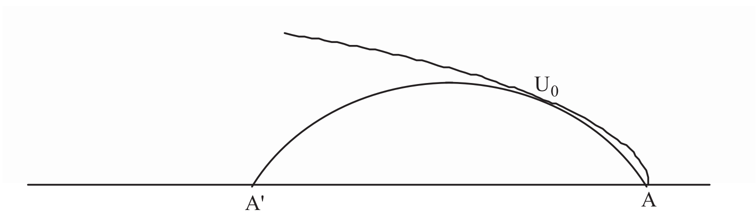
يكون لدينا عندئذ ثلاث حالات:

أ) القوس $\widehat{AA'}$ بكاملها داخل $\mathcal{P}$، فلا يوجَد حلّ للمسألة.



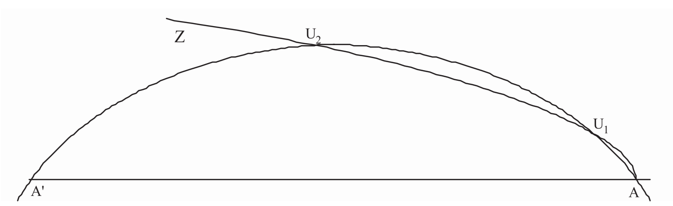
الشكل ٥ـ٨

ب) القوس $\widehat{AA'}$ مماسّة للقطع $\mathcal{P}$ في نقطة U_0 ، فيكون لدينا حلّ.



الشكل ٥ـ٩

جـ) القوس $\widehat{AA'}$ تقطع $\mathcal{P}$ في نقطتين U_1 وَ U_2، فيكون لدينا حَلان.



الشكل ٥ـ٩

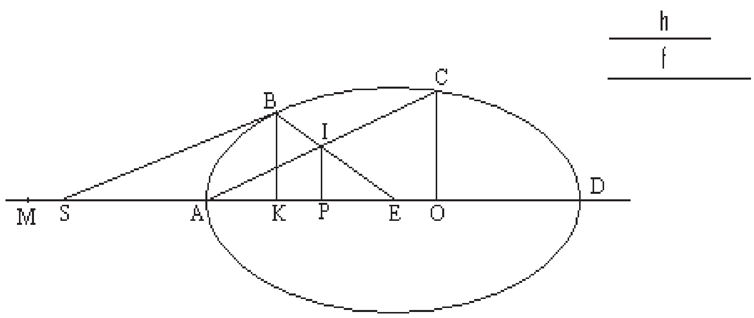
٦- ليكن Γ قطعاً ناقصاً أو زائداً ذا محور مُجانِب DA ومركز E. المطلوب هو تحديد نقطة B على القطع، بحيث يقطع خطّ التماسّ في هذه النقطة المحورَ، من جهة A، على نقطة S وتكون $\frac{BS}{DS}=\frac{h}{f}$ نسبة معلومة (انظر الشكلين ٦-١ وَ ٦-٢). تـشُبه هذه المسألة المسألة السابقة، ولكنَّ الرأسَ A يُبدَل فيها بالرأس D الأكثر بعداً.

تحليل: ليكن AI خطّاً من خطوط الترتيب بالنسبة إلى القطر BE، فيكون معنا $AI // BS$ وتكون I وسط CA، حيث تكون C نقطة التقاطع بين AI وَ Γ. لنُخرج الخطوط KB، PI وَ OC العمودية على DA.

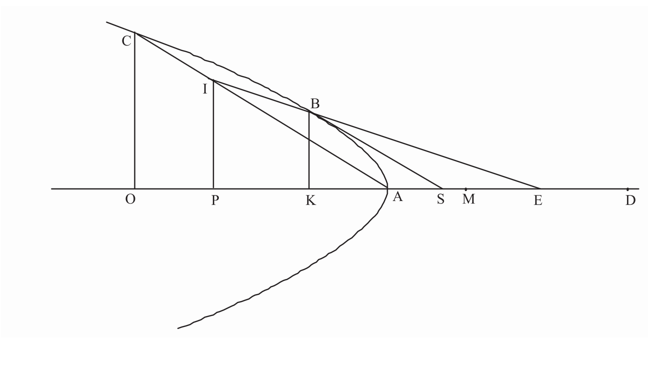
إذا وضعنا $DA = d$ وَ a = الضلع القائم، يكون معنا: $\frac{d}{a}=\frac{OD.OA}{CO^2}$ وَ $\frac{d}{a}=\frac{KD.KA}{BK^2}$.

ويكون معنا: I هي وسط CA، E هي وسط DA وَ $PI // OC$. فنستنتج من ذلك أنَّ:

$AP = \frac{1}{2}AO$ ، $EP = \frac{1}{2}OD$ ، $IP = \frac{1}{2}CO$ ، ويكون معنا أيضاً: $\frac{d}{a}=\frac{PE.PA}{PI^2}$.



الشكل ٦-١، Γ قطع ناقص



الشكل ٦-١، Γ قطع زائد

إذا وضعنا $\frac{d}{a} = \frac{EM}{MA}$، تكون النسبة $\frac{EM}{EA}$ معلومة ويكون معنا: $\frac{ME}{EA} = \frac{MP.PA}{AI^2}$ [٤]. يكون معنا $\frac{AS}{SE} = \frac{KA}{AE}$ وَ $\frac{PK}{KE} = \frac{IB}{BE} = \frac{AS}{SE}$ (لأنَّ $AI \parallel BS$ وَ $BK \parallel IP$)، فيكون $\frac{KA}{AE} = \frac{PK}{KE}$.

فنستخرج من ذلك، بالتركيب في حالة وبالفصل في الحالة الأخرى، أنَّ $\frac{EK}{EA} = \frac{EP}{EK}$، فيكون:

$$(\alpha) \qquad .EK^2 = EP.\,EA$$

ونستخرج من $\frac{AS}{SE} = \frac{KA}{AE}$ [٥]، أنَّ: $\frac{IA}{BS} = \frac{AE}{SE} = \frac{KA}{AS}$ وَ $\frac{BS}{AS} = \frac{IA}{AK}$. ولكنَّ $\frac{BS}{DS} = \frac{h}{f}$، فنحصل على : $\frac{DS}{AS} = \frac{IA}{AK}.\frac{f}{h}$. ولكنَّ $\frac{KD}{KA} = \frac{DS}{SA}$، لأنَّ $\frac{KE}{AE} = \frac{AE}{ES}$، وهذا ما يعطي إذا جمَّعنا هذه النتائج وأخذنا بعين الاعتبار أنَّ $AE = DE$: $\frac{DK}{AE} = \frac{DS}{ES}$، فيكون إذاً : $\frac{KD}{KA} = \frac{IA}{AK}.\frac{f}{h}$، فنحصل على: $\frac{KD}{IA} = \frac{f}{h}$. ونستخرِج من $\frac{KD^2}{IA^2} = \frac{f^2}{h^2}$ وَ $\frac{ME}{EA} = \frac{MP.PA}{IA^2}$،

$$(\beta) \qquad .\frac{h^2}{f^2}\frac{ME}{EA} = \frac{MP.PA}{DK^2}$$

إذا استندنا إلى المعادلتين (α) وَ (β)، يُمكن أن نواصل الاستدلال، كما فعلنا في القضية السابقة، بفضل استخدام القطع المكافئ $\mathcal{P}$ والقطع الزائد $\mathcal{H}$ اللذين لا يُظهرُهما ابن الهيثم إلا في التركيب[٦]. يبدو أنَّ ابن الهيثم قد أراد تجنُّب إعادة الاستدلال؛ كان بإمكانه أن يؤكِّد أنَّ النقطة P معلومة، بعد أن أثبت المعادلتين (α) وَ (β).

نستخرج من النقطة P بالتتابع النقاط O، C وَ I ثمَّ B وخطّ التماسّ SB.

ويُبيِّن التركيب وجود النقطة P.

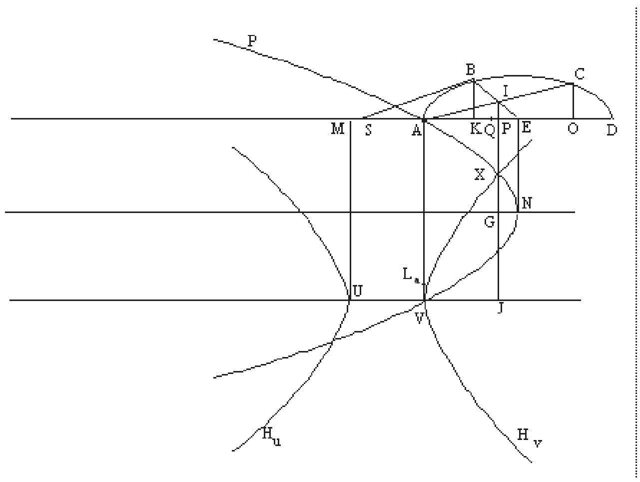
---

[٤] نستخرج هذه النتيجة من القضية الثانية من المقالة السابعة من "كتاب المخروطات" (كما فعلنا ص. ٧٥ أعلاه).

[٥] نستخرج هذه النتيجة من القضية ٣٧ من المقالة الأولى من "كتاب المخروطات".

[٦] توصلِنا المعادلة (β) إلى القطع الزائد $\mathcal{H}$ بدون أن يكون استخدام التناظرات ضرورياً لإظهاره؛ يكون معنا، بالفعل، $DK = AK + AD$ ، وهذا ما يوجِب نقل محور القطع الزائد المساعِد $\mathcal{H}$ نحو الأسفل بمقدار VA مساو لِـ DA. نرى بوضوح الترابط بين هذه المسألة والمسألة السابقة: يتمُّ المرور من بناء إلى بناء آخر بنقل محور القطع الزائد المساعِد، وليس بالتناظرات كما أمكن تأكيد ذلك بشكل مغلوط .

٧- **تركيب المسألة:** لنتناول من جديد الشكلين (الشكل ٧-١ للقطع الناقص والشكل ٧-٢ للقطع الزائد).

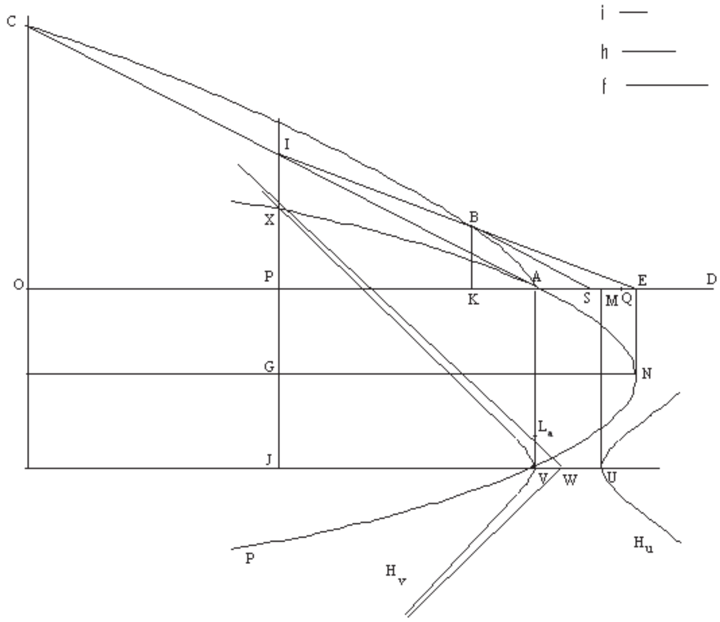


الشكل ٧-١

لنخرج الخطوط NE، VA وَ UM العمودية على الخط DA، مع $EN = EA$ وَ $AV = MU = AD$. وليكن GN وَ JV بحيث يكون $NG // DA$ وَ $VJ // DA$. يكون معنا $UV = MA$. لنضع: $\frac{AE}{EQ} = \frac{h^2}{f^2}$ وَ $\frac{ME}{EQ} = \frac{UV}{VL_a}$، ولنرسم القطعَ الزائد $\mathcal{H}$ ذا المحور المستعرِض (أي "السهم المجانب" كما يقول ابن الهيثم) UV والضلع القائم VL_a، ولنرسم القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذا المحور GN والضلع القائم AE. يمرُّ القطع المكافئ $\mathcal{P}$ بالنقطتين A وَ V.

يكون للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ وللفرع $\mathcal{H}_V$، في حالة القطع الناقص، نقطة مُشترَكة وتقعُّران متضادَّان؛ وتقطع $\mathcal{H}_V$ من جديد القطع المكافئ $\mathcal{P}$ على النقطة X التي تسقط في النقطة P بين A وَ E. لنلاحظ أنَّ الفرع $\mathcal{H}_U$ يقطع أيضاً $\mathcal{P}$ ، ولكن في نقاط تكون مساقطها على امتداد AD المستقيم ولا تعطي أيَّ حلّ.

لنتناول، في حالة القطع الزائد، فرعَ القطع الزائد $\mathcal{H}_V$ ذا المحور UV، وخطّاً مقارِباً يقطع نصف الخطّ المستقيم VN الذي هو محور القطع المكافئ، فيقطع إذاً القطع المكافئ؛ فينفذ الفرع $\mathcal{H}_V$ من النقطة V داخل القطع المكافئ ويقترِب إلى ما لا نهاية من خطّه المقارَب ويقطع القطع المكافئ من جديد على النقطة X.



الشكل ٧ـ٢

لنلاحظ أنَّ الفرع $\mathcal{H}_U$ والقطع المكافئ $\mathcal{P}$ يُمكِن أن لا يتقاطعا أو أن يكون لهما نقطة أو نقطتان مُشترَكتان؛ وإذا وُجِدَت نقطة تقاطع بينهما فإنـــّها تسقط على الخطّ EA بين A وَ E ولا تعطي حلاً للمسألة.

يقطع الخطُّ، الخارجُ من X إلى الخطّ DA، الخطوطَ DA، GN وَ UV بالترتيب على النقاط P، G وَ J.

لتكن O نقطة بحيث يكون $AP = PO$؛ يقطع الخطُّ العموديُّ على DA في النقطة O القطعَ Γ على النقطة C؛ ويتقاطع الخطّان CA وَ PG على النقطة I وسط CA؛ ويقطع EI القطعَ Γ على النقطة B. والخطُّ SB الموازي للخطّ IA مماسٌّ للقطع Γ.

لنبيِّن أنَّ: $\frac{h}{f}=\frac{BS}{SD}$. يكون معنا: $EP\,.\,EA=EK^2$ (كما كان في التحليل)، $PE=NG$ وَ $NG\,.\,EA=GX^2$ (لأنَّ $X\in\mathcal{P}$).

فيكون إذاً $EK=GX$. يكون معنا: $GJ=EN=ED$، فنحصل على $JX=KD$.

ويكون معنا من جهة أخرى: $\frac{EA}{EQ}.\frac{ME}{EA}=\frac{UV}{VL_a}=\frac{JU.JV}{JX^2}$ (لأنَّ $X\in\mathcal{H}$)، فنستنتج أنَّ:

$\frac{JU.JV}{JX^2}=\frac{MP.PA}{AI^2}\frac{h^2}{f^2}$ ؛ ولكن $JU\,.\,JV=MP\,.\,PA$، فيكون إذاً $\frac{AI^2}{DK^2}=\frac{h^2}{f^2}=\frac{AI^2}{JX^2}$،

فنحصل على : $\frac{AI}{KD}=\frac{h}{f}$. ونستنتج من ذلك أنَّ $\frac{IA}{KA\frac{h}{f}}=\frac{KD}{KA}$.

ولكن : $\frac{BS}{SA}=\frac{IA}{KA}$. فليكن i بحيث يكون: $\frac{SA}{i}=\frac{f}{h}$، فيكون معنا: $\frac{BS.AK}{I'.AI}=\frac{F}{H}=\frac{SA.AI}{I'.AI}$ ؛

فنستخرج من ذلك: $\frac{AI}{KA\frac{h}{f}}=\frac{BS}{i}$ ، فإذاً: $\frac{BS}{i}=\frac{KD}{KA}$.

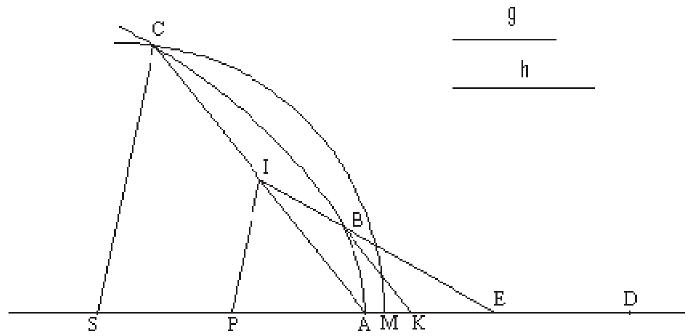
ويكون من جهة أخرى: $\frac{DS}{SA}=\frac{KD}{KA}$، فيكون إذاً: $\frac{BS}{i}=\frac{DS}{SA}$ ، ويكون بالتالي: $\frac{h}{f}=\frac{i}{SA}=\frac{BS}{SD}$.

٨- ليكن Γ قطعاً زائداً ذا محور مستعرِض DA وذا مركز E. المطلوب هو إيجاد خطّ مماسّ للقطع الزائد Γ في النقطة B، يقطع المحور المستعرِض على النقطة K بحيث تتحقّق المعادلة: $\frac{g}{h}=\frac{BK}{BE}$ $(g<h)$. المسألة هي أيضاً من النوع نفسه، ولكنَّ الخطّين KA أو KD قد استُبدِلا هذه المرّة بالمتَّجِه نصف القطري BE.

تحليل: ليكن الخطّ KB حلاً للمسألة. يقطع الخطّ الخارجُ من A على موازاة KB القطعَ الناقص والقطر BE بالترتيب على C و I، بحيث يكون $CI = AI$؛ يكون معنا : $\frac{h}{g}=\frac{BE}{BK}=\frac{IE}{IA}$ [٧].

لتكن P نقطة على الخطّ AE بحيث يكون $\widehat{IAP}=\widehat{EIP}$. المثلّثان PIE و PAI ، ويكون معنا: $\frac{EI}{IA}=\frac{PI}{PA}=\frac{EP}{PI}$، فيكون: $EP\,.\,PA=PI^2$ و $PI>PA$.

[٧] نستخرج من هذه المعادلة أنَّ I موجودة على الدائرة C_1 ، وأنَّ C موجودة على الدائرة C'_1 التي هي صورة C_1 في التحاكي $(A,2)$.



الشكل ٨

ويكون معنا أيضاً: $\frac{EP}{PA}=\frac{EP^2}{PI^2}=\frac{EI^2}{IA^2}=\frac{h^2}{g^2}$، فيكون إذاً: $\frac{EA+AP}{AP}=\frac{h^2}{g^2}$، $\frac{EA}{AP}=\frac{h^2}{g^2}-1=\frac{h^2-g^2}{g^2}$ $(g<h)$.

والخطّ AE هو نصف المحور، فيكون PA معلوماً. فيكون PE، بالتالي، معلوماً ويكون IP أيضاً معلوماً[٨]. ليكن SC بحيث يكون $PI \,//\, SC$، فيكون $2AP = AS$ وَ $2IP = CS$، وهذا ما يُعطي $CS > AS$؛ وهذه الأطوال معلومة.

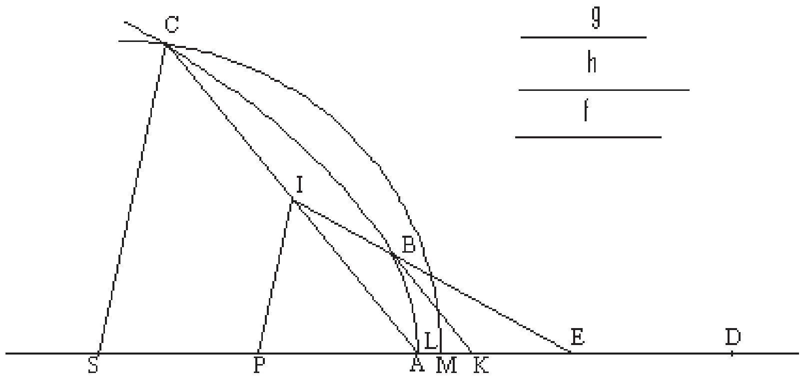
لنضع $SC = SM$، فيكون $SA < SM$ وتكون M على امتداد SA. تقطع الدائرة (S, SM) القطع الناقص على النقطة C؛ ونحصل من النقطة C على النقطة I وسط AC، ثمَ نحصل على B وعلى الخطّ KB.

٩- **التركيب**: نتناول من جديد القطع الزائد Γ والنسبة $\frac{g}{h}$. لتكن f بحيث يكون: $\frac{g}{f}=\frac{h}{g}$، فيكون عندئذ $\frac{h}{f}=\frac{h^2}{g^2}$.

لنضع $\frac{PE}{PA}=\frac{h^2}{g^2}=\frac{h}{f}$؛ هذا ما يُحدِّد نقطة P على امتداد AE. لتكن S بحيث يكون $AP = SP$، ولتكن L بحيث يكون $AP.EP = LP^2$، (فيكون إذاً $EP > LP > AP$). لنرسم الدائرة $(S, 2PL)$

---

[٨] يكون معنا: $EA=AP\frac{g^2}{h^2-g^2}$، $EA=EP\frac{h^2}{h^2-g^2}$، $PI=\frac{g.h}{h^2-g^2}$؛ وهكذا يكون معنا المركز P ونصف قطر الدائرة C_1.



الشكل ٩

التي تقطع المحور على النقطة M بحيث يكون $SM = 2\,PL > AS$، فتكون M إذاً خارج القطع Γ وتكون S داخله؛ وتقطع الدائرة القطعَ Γ على النقطة C.

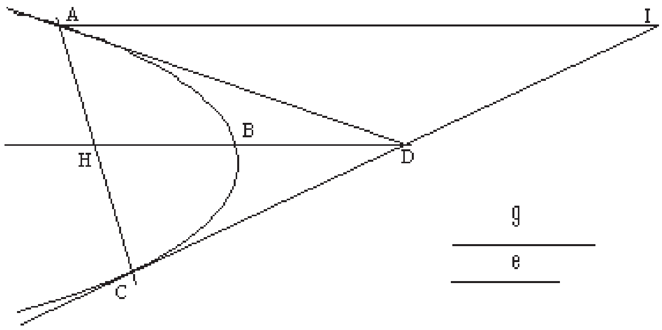
لتكن I وسط CA، فيقطع الخطُّ EI القطعَ الزائدَ على النقطة B. لنرسم خطَّ التماسّ KB الذي يوازي CA ولنبيِّن أنَّ: $\frac{BK}{BE} = \frac{g}{h}$.

ويكون معنا $SC \,//\, PI$ وَ $2PI = SC$، بما أنَّ P هي وسط SA و I هي وسط CA، فيكون إذاً $PI = PL$ وَ $PE.\, PA = PI^2$. ونستخرج من ذلك: $\frac{PI}{PA} = \frac{PE}{PI}$، فنستنتِج عندئذ التشابهَ بين المثلّثين PEI وَ PIA. ويكون معنا عندئذ كما كان في التركيب: $\frac{EI^2}{IA^2} = \frac{PE}{PI}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{EI^2}{IA^2} = \frac{h^2}{g^2}$. ويكون معنا من جهة أخرى: $\frac{EB}{BK} = \frac{EI}{IA}$، فيكون إذاً: $\frac{BK}{BE} = \frac{g}{h}$.

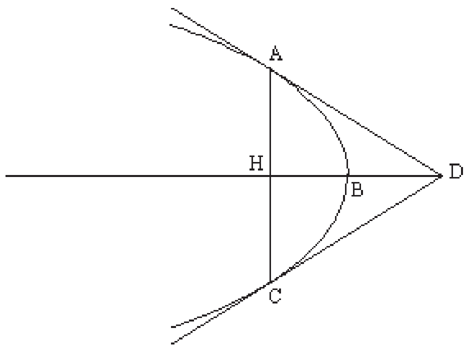
١٠- ليكن معنا القطعَ المكافئَ Γ وخطَّ التماسّ CD في النقطة C من هذا القطع المكافئ. المطلوب هو إيجاد خطّ آخر مماسٍّ للقطع المكافئ بحيث، إذا كانت A نقطة تماسّه وكانت D نقطة تقاطعه مع CD، تكون النسبة $\frac{DA}{DC} = \frac{e}{g}$ معلومة.

تحليل: لتكن النقطة H وسط الخطّ CA؛ يكون الخطُّ HD قطراً، ويكون HD وَ AC اتجاهين مترافقين، ويقطع HD القطعَ Γ على النقطة B وسط HD (انظر الشكلين ١٠-١ أو ١٠-٢).

إذا كان $E = G$، يكون حينئذ $DA=DC$ (انظر الشكل ١٠-٢). تكون الزاوية $\widehat{AHD}$ قائمة، لأنَّ $HA=HC$، فيكون HD عندئذ محورَ Γ، وهو معلوم؛ فتكون النقطة D معلومة. وخطُّ التماسّ المطلوب هو خطّ التماسّ الثاني الخارج من D وهو مساوٍ للخطّ DC؛ فتكون النقطتان A وَ C متناظرتين بالنسبة إلى المحور HD.



الشكل ١٠-١



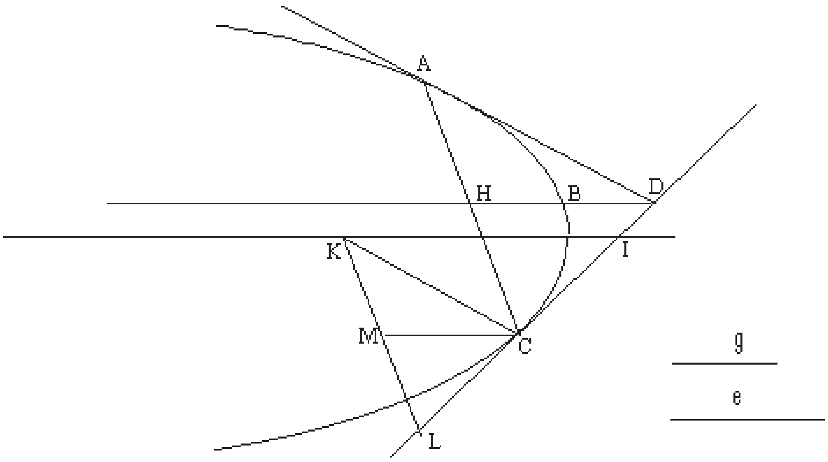
الشكل ١٠-٢

إذا كان $E \neq G$، يكون $AD \neq DC$ وتكون الزاوية $\widehat{H}$ قائمة. الخطّ DC معلومٌ، واتجاه DH معلوم، لأنَّ DH موازٍ لمحور Γ، فتكون الزاوية $\widehat{CDH}$ معلومة.

لنخرِج من A الخطَّ الموازي لمحور Γ، فيقطع الخطَّ CD على النقطة I، ويكون $DI=DC$، فيكون $\frac{e}{g}=\frac{DA}{DI}$ وَ $\widehat{CDH}=\widehat{DIA}$. إنَّ شكل المثلّث DIA معلومٌ، فتكون الزاوية $\widehat{IDA}$ معلومة، وتكون الزاوية $\widehat{CDA}$، بالتالي، معلومة أيضاً. ولكنَّ النسبة $\frac{e}{g}=\frac{DA}{DC}$

معلومة، فيكون شكلُ المثلّث CDA معلوماً، ويكون الخطُّ CA عندئذ معلوماً. وتكون A، نقطة تقاطع CA مع Γ، هي النقطة المطلوبة.

١١– تركيب: يلتقي محور Γ بالخطّ المعلوم CD في النقطة I. لتكن K نقطة على محور Γ بحيث يكون: $\frac{CI}{CK}=\frac{g}{e}$ (انظر المناقشة) ولتكن L نقطة على الخطّ CD بحيث يكون $CI=CL$. لنخرِج من C الخطَّ الموازي للخطّ KL، وهو يقطع المحورَ فيقطع إذاً Γ على النقطة A. لتكن النقطة H وسط الخطّ CA. ويقطع الخطُّ، الخارج من H على موازاة المحور، القطع Γ على النقطة B، ويقطع الخطَّ CD على النقطة D؛ فيكون HB قطراً ويكون HA خطّ الترتيب؛ فيكون DA خطّ التماسّ الثاني الخارج من D.



الشكل ١١-١

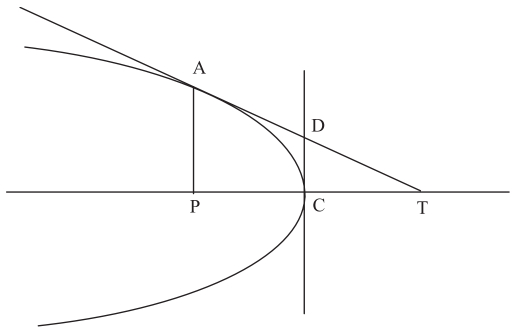
لنبيِّن أنَّ $\frac{DA}{DC}=\frac{e}{g}$. لتكن النقطة M وسط KL، فيكون معنا $CM \parallel IK$، فإذاً $CM \parallel DH$، ولكنَّ $CH \parallel KL$ فيكون المثلّثان DCH و CML متشابهين، فنحصل على: $\frac{DC}{CH}=\frac{CL}{LM}$.

نستنتج من ذلك أنَّ $\frac{DC}{CA}=\frac{CL}{LK}$، فيكون المثلّثان DCA و CLK متشابهين ويكون معنا:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{CK}{CL}=\frac{e}{g}.$$

مناقشة: يكون للمسألة حلٌّ وحيدٌ إذا وجِدت النقطة K.

إذا رمزنا بـ h إلى المسافة بين C والمِحوَر، فإنَّ الشرط الضروري والكافي لوجود K هو $h \leq CK$؛ ولكنَّ $\frac{e}{g} = \frac{CK}{CI}$، فيكون هذا الشرط معادلاً لـ $\frac{e}{g} \geq \frac{h}{CI}$، أو أيضاً لـ $\frac{e}{g} \geq \sin\Theta$، حيث تكون Θ الزاوية الحادة المشكـلَّة بين خطّ التماسّ DC ومحور القطع المكافئ. يؤمِّن هذا الشرط وجود نقطتين K وَ K' تتطابقان عندما يكون $\frac{e}{g} = \sin\Theta$؛ وتتوافق كلُّ نقطة من هاتين النقطتين مع حلٍّ واحد للمسألة. لا يُشير ابن الهيثم إلى إمكانية وجود حلّين. عندما تكون النقطة C في رأس القطع المكافئ، تكون النقطة I متطابقة مع هذا الرأس، فلا يُمكِن القيام بالعمل بالطريقة نفسها. إذا كانت T نقطة التقاطع بين خطّ التماسّ المطلوب DA وبين المحور، وإذا كانت P مسقط A على المحور، يكون معنا $CP = CT$، فتكون إذاً النسبة $\frac{e}{g} = \frac{AD}{DC} = \frac{AT}{AP}$ معلومة وتكون الزاوية $\widehat{ATP}$ معلومة؛ فترجع المسألة إذاً إلى المسألة ٥٠ من المقالة الثانية لأبلونيوس. لا يتحدَّث ابن الهيثم عن هذه الحالة؛ ولو تصورَّ هذه الحالة لأمكنه أن يجدها بدون فائدة لأنـــَّها سهلة.



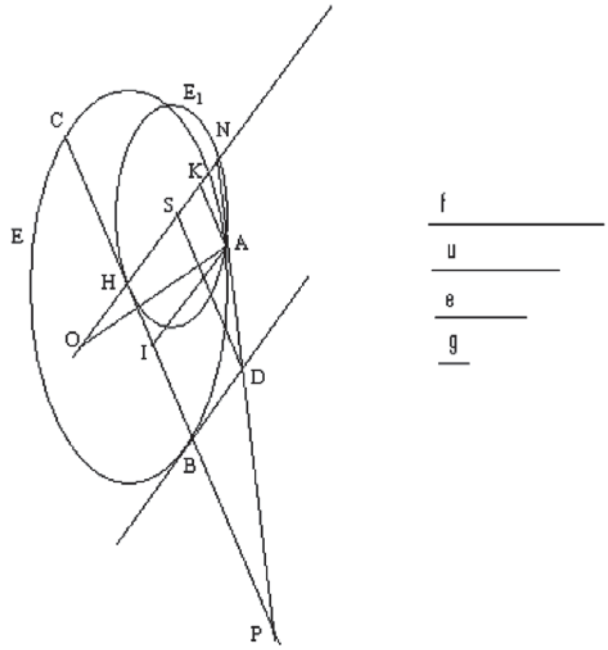
الشكل ١١-٢

١٢- المعطيات هي: القطع المخروطي Γ (القطع الناقص أو القطع الزائد) ذو المركز H، خطّ التماسّ DB في نقطة B من Γ، ونسبة $\frac{e}{g}$.

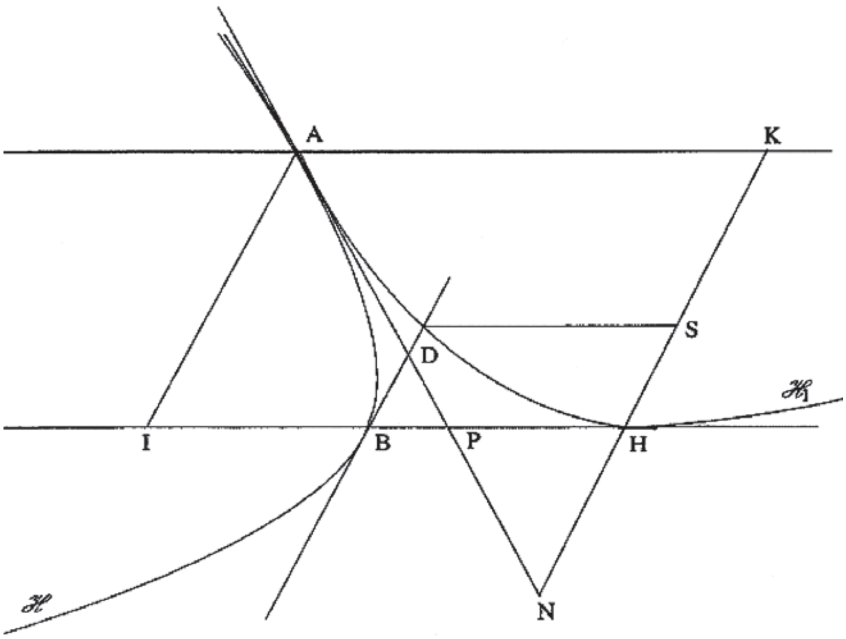
مسألة: أخرِج خطّاً مماسّاً للقطع المخروطيّ Γ، يقطع DB على النقطة D، بحيث يكون $\frac{e}{g} = \frac{DA}{DG}$ (تكون A نقطة التماسّ).

تحليل: إذا كان a الضلع القائم المُرفق بالقطر d المارّ بالنقطة B، يكون معنا: $\frac{d}{a}=\frac{HB}{\frac{1}{2}a}=k$،

وهذه النسبة معلومة.



الشكل ١٢ـ١



الشكل ١٢ـ٢

نفترض أنَّ خطَّ التماسّ DA معلومٌ؛ لتكن P نقطة التقاطع بين DA وَ BH، وليكن IA بحيث يكون $BD // IA$. يكون معنا: $IH . HP = HB^2$ وَ $k = \frac{HI.IP}{AI^2}$ (القضية ٣٧ من المقالة الأولى، "المخروطات"). فنستنتج من ذلك أنَّ : $\frac{HP}{IP} = \frac{HB^2}{kAI^2}$.

لنخرج HN بحيث يكون $HN // AI$، (وتكون N على AD)؛ ولنخرج AK بحيث يكون $AK // PH$ ، (وتكون K على HN). يكون معنا: $\frac{HB^2}{kAI^2} = \frac{HN}{IA} = \frac{HP}{PI}$، فيكون من ذلك: $\frac{HB^2}{k} = HN.IA$ ، وكذلك $\frac{1}{k} = \frac{HN.KH}{HB^2} = \frac{HN.IA}{HB^2}$. فنستنتج عندئذ على التوالي: $\frac{1}{k} = \frac{HN.KH}{HI.HP}$، $\frac{HP}{HN} = \frac{k.KH}{HI}$ وَ $\frac{AK}{KN} = \frac{HP}{HN} = \frac{k.KH}{AK}$، فنحصل على: $\frac{1}{k} = \frac{KN.KH}{AK^2}$.

ليكن u الطول المعرَّف بواسطة المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{KH}{u}$، فيكون معنا:

$$u.KN = AK^2. \qquad (١)$$

يكون معنا عندئذ: $HI^2.\frac{HN}{NK} = KA^2.\frac{HN}{NK} = u.HN$؛ ولكنّ $\frac{HB^2}{HI^2} = \frac{PH.IH}{HI^2} = \frac{PH}{IH} = \frac{PH}{AK} = \frac{HN}{NK}$.

ونستنتج من ذلك أنَّ: $u.HN = HB^2$.

إذا كان Γ القطع الزائد $\mathcal{H}$ ، نتناول القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ ذا المحور المستعرض NH والضلع القائم a_1 ، بحيث يكون: $\frac{1}{k} = \frac{KH}{u} = \frac{NH}{a_1}$؛ وإذا كان Γ القطع الزائد ε ، نتناول القطع الزائد ε_1 ذا القطر NH والضلع القائم a_1. يمرُّ $\mathcal{H}_1$ (أو ε_1) بالنقطة A على القطع Γ المعني بالأمر[٩].

يكون معنا $HN // DB$ ونُخرج DS بحيث يكون $DS // BH$(تكون S على NH)؛ فنستنتج عندئذ، من المعادلة $HI.HP = HB^2$، أنَّ $AN.NP = ND^2$ وَأنَّ $KN.NH = NS^2$، فيكون:

[٩] إنَّ القطع $\mathcal{H}_1$ (أو ε_1) المعرَّف على هذا الشكل مشابه للقطع المعلوم (انظر الملاحظة ٤، ص. ١٢٢)

$$\frac{AN}{ND}=\frac{ND}{NP}=\frac{AD}{DP}$$ وَ $AN.DP=AD.DN$.

لنضع $f.NK=AN^2$ ، فيكون $\frac{f}{u}=\frac{AN^2}{AK^2}$ ؛ ويمكن أن نكتب: $\frac{f}{AN}=\frac{AN}{NK}=\frac{DN}{NS}=\frac{DP}{DB}$ ،

فنستنتج من ذلك أنَّ $f.DB=AN.DP=AD.DN$ ، فيكون معنا من جهة: $\frac{f}{DN}=\frac{AD}{DB}$ ،

ويكون معنا من جهة أخرى: $\frac{f}{u}=\frac{AN^2}{AK^2}=\frac{DN^2}{DS^2}$ ، فنحصل على: $f.DS^2=U.DN^2$.

ولكنَّ $U.HN=HB^2=DS^2$ ، فيكون $f.HN=DN^2$ وَ $\frac{f}{DN}=\frac{DN}{HN}$.

ونستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{AN}{NS}=\frac{AD}{HS}=\frac{AD}{DB}=\frac{DN}{HN}$ ، ولكنَّ معنا وفقاً للفرضيات: $\frac{e}{g}=\frac{DA}{DB}$ ،

فنحصل على: $\frac{e}{g}=\frac{AN}{NS}$.

ونحن نعلم أنَّ: $KN.NH=NS^2$ ، فنستنتج أنَّ: $\frac{g^2}{e^2}=\frac{NS^2}{NA^2}=\frac{KN.NH}{NA^2}$ ؛ ولكنَّ: $f.NK=NA^2$ ،

فنستنتج أنَّ: $\frac{g^2}{e^2}=\frac{NH}{f}$.

ليكن $f=NO$ ، فيكون معنا $NO.NK=NA^2$ ، فنحصل على: $\frac{AN}{NK}=\frac{NO}{AN}$. فيكون المثلّثان KNA وَ ONA اللذان لهما الزاوية المشتركة N ، متشابهين، فتكون الزاوية: $\widehat{PBD}=\widehat{BHN}=\widehat{AKN}=\widehat{NAO}$ ، زاوية معلومة. وهكذا يكون معنا: $\frac{NH}{NO}=\frac{g^2}{e^2}$ [١٠] وَ $\alpha=\widehat{PBD}=\widehat{NAO}$.

توجد النقطة A على القوس $\mathcal{C}$ القابلة للزاوية α والمرسومة على القطعة NO؛ وهي توجَد أيضاً على $\mathcal{H}_1$ أو $\mathcal{E}_1$ حسب الحالة المدروسة.

[١٠] تُبيِّن هذه المعادلة أنَّ $e<g$ وأنَّ $NH<NO$ ؛ إذا كان $g=e$ تكون O في H؛ وإذا كان $e>g$ يكون $NH>NO$.

فإذا كان الخطُّ HN ذا طول وموضع معلومين، تكون النقطة A إذاً معلومة، وتكون الزاويتان $\widehat{ANH}$ وَ $\widehat{AON}$ معلومتين أيضاً، كما تكون الزاوية $\widehat{HPN}$ المساوية للزاوية $\widehat{AON}$ معلومة هي الأخرى.

إذا وُجِد خطّ تماسّ يحقِّق شروط المسألة فإنَّه يُشكِّل مع القطر BH زاوية $\widehat{HPN}$ = Θ محدَّدة استناداً لمعطيات المسألة؛ وهذا ما سيُحدِّده ابن الهيثم في بداية التركيب.

١٣- التركيب: خطَّة العمل هي:

ا) رسم شكل $MVLXJR$ مشابه للشكل $NKHOPA$ لنحصل على Θ = $\widehat{NOA} = \widehat{JLM}$.

ب) البرهان على أنَّه إذا كان خطّ التماسّ PN يُحقِّق $\widehat{HPN}$ = Θ، يكون معنا $\frac{DA}{DG} = \frac{e}{g}$.

ج) المناقشة.

ا) لنأخذ فرضيات القضية ١٢:

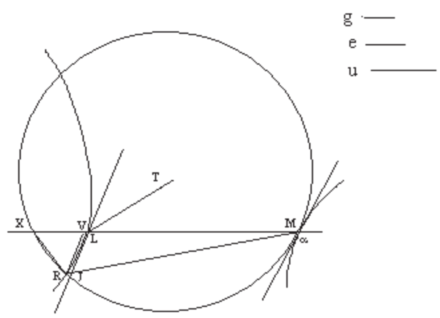
$k = \frac{HB}{\frac{1}{2}a} = \frac{d}{a}$، α = زاوية الترتيب، النسبة $\frac{e}{g}$ معلومة، ولنأخذ خطّين ML وَ TL بحيث يكون $\frac{LM}{LT} = \frac{1}{k}$، ونأخذ شكلين – القطع الناقص $\mathcal{E}_2$ وفرع القطع الزائد $\mathcal{H}_2$ المارّ بالنقطة L – يكون الخطّ ML قطراً لهما (قطراً مُجانباً في حالة $\mathcal{H}_2$)، ويكون TL ضلعاً قائماً وتكون α زاوية ترتيب. [يكون $\mathcal{H}_2$ وَ $\mathcal{E}_2$ إذاً مشابهين لِـ $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{E}_1$].

ليكن XM الخطّ المحدَّد بالمعادلة $\frac{LM}{MX} = \frac{g^2}{e^2}$، حيث تكون M نقطة على الخطّ ML؛ ونتناول الدائرة $\mathcal{C}$ التي تمرُّ بالنقطتين M وَ X بحيث تكون إحدى القوسين $\widehat{MX}$ قابلةً للزاوية α. ولنلاحظ أنَّ ابن الهيثم لا يوضِّح إذا كانت زاوية الترتيب ترمز إلى الزاوية الحادَّة أو إلى الزاوية المنفرِجة. فإحدى القوسين $\widehat{MX}$ من الدائرة $\mathcal{C}$ قابلة للزاوية α والأخرى قابلة للزاوية المكمِّلة للزاوية α. وتوجد، من جهة أخرى، دائرتان متناظرتان

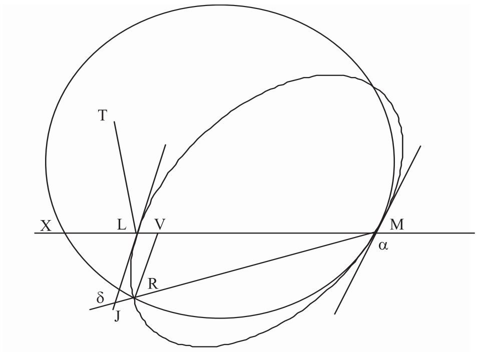
بالنسبة إلى الخطّ L؛ ويُمكن أن نأخذ تلك التي تمسُّ القطع الناقص $\mathcal{E}_2$ في النقطة M (أو الفرع الثاني من $\mathcal{H}_2$).

يقول ابن الهيثم إنَّ القوس القابلة للزاوية α تقطع القطعَ المخروطيَّ ($\mathcal{E}_2$ أو $\mathcal{H}_2$) "على تصاريف الأحوال"؛ وهذا غير صحيح كما يُبيِّن ذلك ابن الهيثم نفسه عندما يتفحَّص لاحقاً الحالات الخاصَّة في الفقرة المكرَّسة للمناقشة.

لتكن R نقطة التقاطع ولتكن VR إحداثيّتها العمودية على XM. نحن نعلم أنَّ $\widehat{RVM} = \alpha = \widehat{MRX}$؛ فيكون المثلّثان MVR و MRX متشابهين ويكون معنا: $\frac{MR}{MV} = \frac{MX}{MR}$، أو أيضاً: $MR^2 = MV \cdot MX$، فيكون من ذلك: $\frac{g^2}{e^2} = \frac{ML}{MX} = \frac{VM \cdot ML}{MR^2}$.

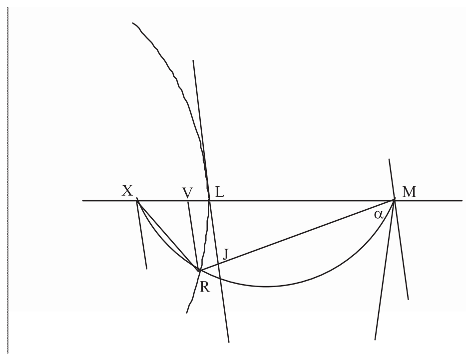


الشكل ١٣-١

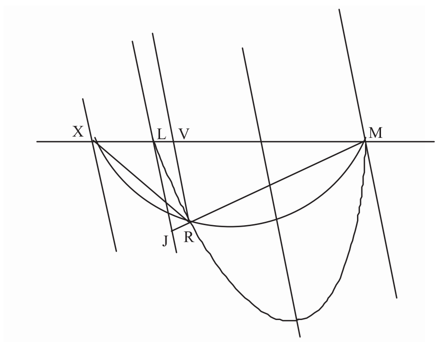


الشكل ١٣-٢

وتوجَد إمكانية أخرى للقوس القابلة للزاوية α، وهي أن يكون خطّ التماسّ في النقطة X موازياً لخطّ التماسّ مع $\mathcal{E}_2$ أو مع $\mathcal{H}_2$ في النقطة L.



الشكل ١٣-٣



الشكل ١٣-٤

ويكون معنا من جهة أخرى، بما أنَّ نقطة R موجودة على $\mathcal{E}_2$ أو $\mathcal{H}_2$:

$$\frac{VM.ML}{VR^2}=\frac{ML}{LT}=\frac{1}{k}$$ (معادلة القطع المخروطي).

يقطع الخطُّ الخارجُ من L، والموازي للخط VR، MRعلى النقطة J ؛ الزاوية $\widehat{LJM}$ معلومة لأنَّ $\widehat{JLM}=\alpha$ معلومة والزاوية $\widehat{LMJ}$ معلومة (لأنـــّها مُحدَّدة بالنقطتين المعلومتين L وَ M وبالنقطة R التي هي نقطة تقاطع القطع المعلوم $\mathcal{E}_2$ أو $\mathcal{H}_2$ مع قوس من دائرة معلومة). ليكن $\widehat{LJM}=\Theta$.

لنَعد إذاً إلى القطع ABC. لنرسم خطَّ تماسّ يُشكـــِّل مع القطر HB زاوية مساوية للزاوية $\widehat{LJM}$؛ لتكن A نقطة التماسّ وَ P نقطة تقاطع خطّ التماسّ مع القطرPH، حيث يكون IA خطّ الترتيب. تـــُحدَّد النقطتان N وَ K كما جرى في القضيَّة ١٢، كما تــُعرَّف النقطة A على الخطّ HN بواسطة : $\frac{ON}{NH}=\frac{XM}{ML}=\frac{e^2}{g^2}$، مع $\widehat{LJM}=\widehat{HPA}=\Theta$ وَ $\alpha=\widehat{JLM}=\widehat{PHN}=\widehat{PLA}=\widehat{AKN}$.

المثلّثات AKN، NPH، API، MRV وَ MJL متشابهة. ونحن نعلم أنَّ: $\frac{1}{k}=\frac{MV\,VL}{VR^2}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{VL}{VR}.\frac{MV}{VR}=\frac{AI}{HI}.\frac{AI}{IP}$. ولكننا نستنتج من تشابه المثلّثات: $\frac{MV}{VR}=\frac{ML}{LJ}=\frac{NH}{HP}=\frac{AI}{IP}$، فيكون بالتالي: $\frac{VL}{VR}=\frac{AI}{HI}=\frac{HK}{KA}$. يكون معنا عندئذ:

$$\frac{1}{k}=\frac{ML}{LT}=\frac{MV}{RV}.\frac{LV}{VR}=\frac{NK}{KA}.\frac{KH}{KA}=\frac{NK.KH}{KA^2}.$$

ونستنتج من $\frac{RV}{VM}=\frac{KA}{KN}$ ومن $\frac{LV}{VR}=\frac{HK}{KA}$، أنَّ $\frac{LV}{VM}=\frac{HK}{KN}$ وَ $\frac{LM}{VM}=\frac{NH}{KN}$. ولكنَّ: $\frac{ML}{MX}=\frac{HN}{NO}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{KN}{NO}=\frac{MV}{MX}=\frac{MV^2}{MX.MV}=\frac{MV^2}{MR^2}=\frac{KN^2}{NA^2}$ ؛ فيكون من ذلك $KN.NO=NA^2$.

لنأخذ u بحيث يكون: $\frac{1}{k}=\frac{KH}{u}$ ، فيكون معنا: $\frac{1}{k}=\frac{KH.NK}{u.NK}$. ولكنَّ $\frac{1}{k}=\frac{KH.NK}{KA^2}$، فيكون $u.NK=KA^2$، وبالتالي: $\frac{NA^2}{KA^2}=\frac{NO}{u}$.

إنّ لدينا من جهة أخرى: $\frac{KN}{NH}=\frac{AK}{PH}=\frac{IH}{HP}=\frac{IH^2}{HP.HI}=\frac{IH^2}{HB^2}=\frac{AK^2}{HB^2}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{u.KN}{u.NH}=\frac{AK^2}{HB^2}$، ولكنَّ: $u.NK=KA^2$، فنحصل على: $u.NH=HB^2$.

لنُخرج (كما فعلنا في القضية ١٢) الخطَّ DS الموازي للخط AK؛ فنحصل من $HI.HP=HB^2$ على $NA.NP=ND^2$ وعلى $NK.NH=NS^2$.

يكون معنا، من جهة أخرى، $\frac{HN}{ON}=\frac{ML}{MX}=\frac{g^2}{e^2}=\frac{HN.NK}{ON.NK}=\frac{NS^2}{NA^2}$، فنحصل على: $\frac{NA}{NS}=\frac{e}{g}$. ونحصل من $ON.NK=NA^2$ على $\frac{ON}{NA}=\frac{AN}{NK}=\frac{PN}{NH}$، فيكون $ND^2=AN.NP=ON.NH$ وعلى $\frac{ON}{NH}=\frac{ND^2}{NH^2}=\frac{e^2}{g^2}$.

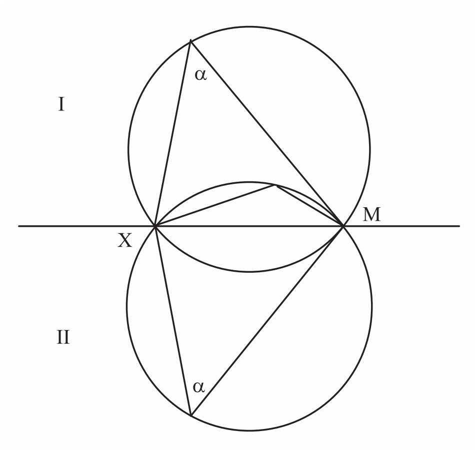
وهكذا يكون معنا: $\frac{AN}{NS}=\frac{ND}{NH}=\frac{AD}{HS}=\frac{AD}{DB}$، وبالتالي $\frac{AD}{DB}=\frac{e}{g}$؛ فتحقّق النقطة A الشروط المطلوبة في هذه المسألة.

مناقشة المسألة: تعود هذه المناقشة إلى دراسة وجود النقطة R، نقطة تقاطع $\mathcal{H}_2$ (أو $\mathcal{E}_2$) مع القوس $\mathcal{C}$ القابلة للزاوية α والمحدَّدة استناداً إلى الخطين ML وَ MX. لقد فرضنا $\frac{ML}{MX}=\frac{g^2}{e^2}$. يقول ابن الهيثم "ونجعل أصغرهما قطراً للقطع الزائد"، فإذاً:

إذا كان $g>e$، نأخذ ML كقطر للقطع $\mathcal{H}_2$ (أو $\mathcal{E}_2$) ونأخذ MX كوتر للقوس $\mathcal{C}$ ، وهذا ما فعلناه في كل الأشكال.

إذا كان $g<e$، يكون معنا $ML < MX$، فيجب أن نأخذ MX كقطر، وهذا ما يرجع إلى تبديل الحرفين L وَ X في الأشكال. ولكنَّ الاستدلال المُتــبَّع في التركيب يُصبح غيرَ صالح.

يوضِّح ابن الهيثم بعد ذلك كيفية اختيار القوس $\mathcal{C}$ القابلة للزاوية α ؛ إذ إنَّــه توجد أربع أقواس ممكنة وفقاً لكون α حادَّة أو منفرجة، أو وفقاً لأخذ نصف المستوي I أو نصف المستوي II.



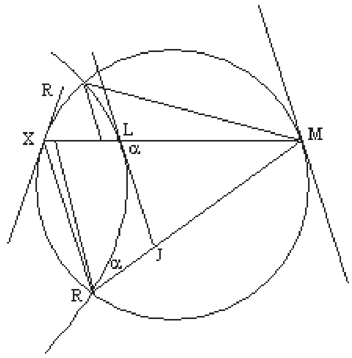
الشكل ١٣ـ٥

ومهما كان اختيار القوس المعنية بالأمر، في حالة القطع الزائد $\mathcal{H}_2$، فإنــَّها تقطع $\mathcal{H}_2$ على نقطة لأنَّ M توجَد خارج الفرع الذي يمرُّ بالنقطة L، في حين أنَّ X توجَد خارجه (إذا افترضنا أنَّ $ML < MX$).

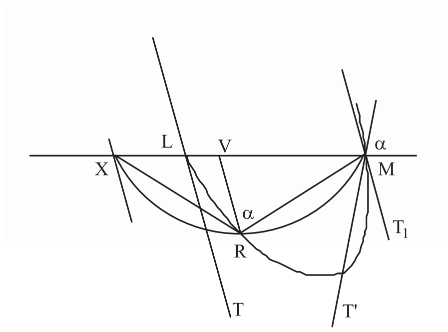
ونختار، في حالة القطع الناقص $\mathcal{E}_2$، نصفَ هذا القطع الذي يجعل فيه خطُّ التماسِّ TL الزاوية $\widehat{MLT}$ حادَّة. وخطُّ التماسّ مع القطع الناقص في النقطة M هو MT_1، حيث يكون $TL \parallel MT_1$.

ليكن MT' بحيث يكون $\widehat{LMT'} = \widehat{MLT}$ ؛ MT' هو خطُّ تماسّ مع القوس القابلة للزاوية المنفرجة α. وتكون هذه القوس داخل القطع الناقص، في جوار النقطة M، والنقطة X من هذه القوس هي خارج القطع الناقص؛ والقوس المعنية بالأمر ونصف القطع الناقص لهما نقطة مشتركة وحيدة هي R.

إذا كان ML المحور الأصغر للقطع الناقص $\mathcal{E}_2$، يكون ML عندئذ[11] قطراً لِـ $\mathcal{C}$ ويكون $\mathcal{E}_2$ وَ $\mathcal{C}$ متماسَّين في النقطة M. وإذا تناولنا المحور الكبير YZ للقطع الناقص والوتر TU

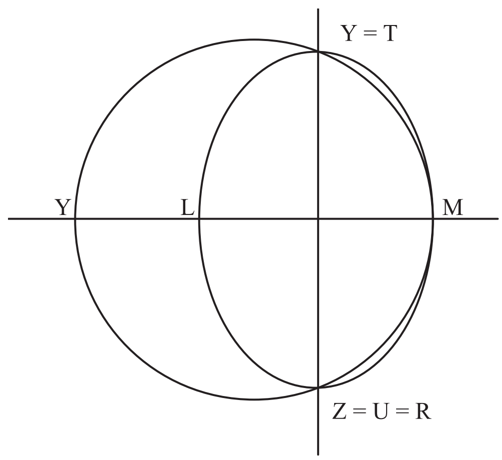


الشكل ١٣ـ٦

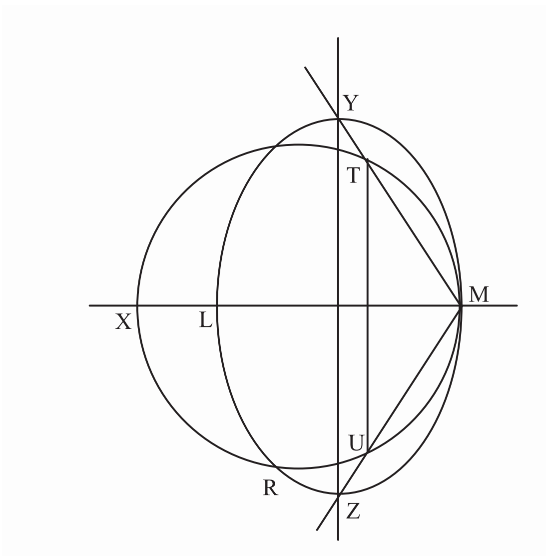


الشكل ١٣ـ٧

المفصول في الدائرة بالزاوية $\widehat{YMZ}$ التي هي منفرجة لأنَّ $ML < YZ$، يُميِّز ابن الهيثم بين ثلاث حالات: ١) $TU = YZ$ ؛ ٢) $TU < YZ$ ؛ ٣) $TU > YZ$.

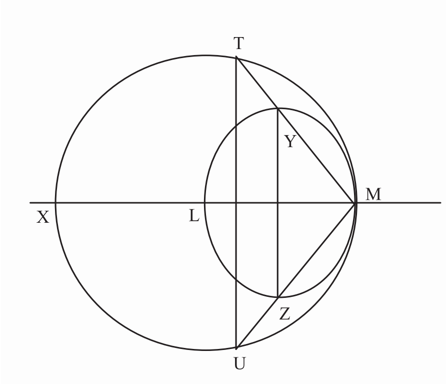


الشكل ١٣ـ٨



الشكل ١٣ـ٩

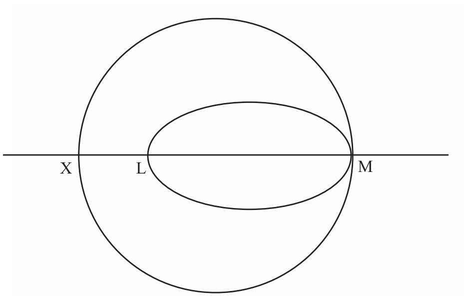
[11] هذا ما يفرض أن يكون $\frac{ML}{LT} = \frac{1}{k} < 1$، فيكون $k > 1$.



الشكل ١٣-١٠

يتقاطع $\mathcal{E}_2$ وَ $\mathcal{C}$ في الحالتين الأولىين، فتكون R موجودة. ولا تكون R موجودة في الحالة الثالثة.

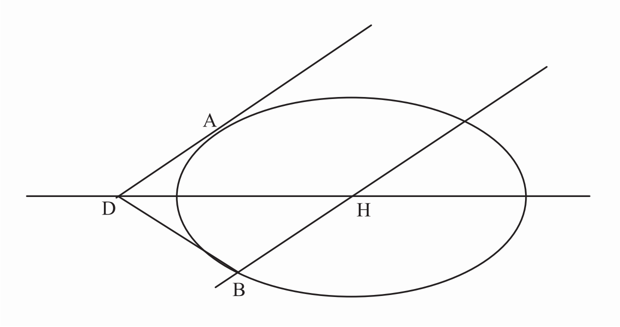
وإذا كان ML، قطر $\mathcal{E}_2$، المحور الأعظم[١٢] لهذا القطع، تكون النقطة X خارج القطع الناقص.



الشكل ١٣-١١

إذا كان $e = g$ ، نعود إلى القطع الأوّليّ Γ ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$) : إذا كان القطرُ BH المحورَ المُجانِب لـِ $\mathcal{H}$ أو محورَ $\mathcal{E}$، تكون المسألة مستحيلة (وفقاً للقضيتين ٢٩ وَ ٣٠ من المقالة الثانية). إذا لم يكن القطرُ BH محوراً، يقطع خطُّ التماس في B هذا المحورَ على النقطة D، ويكون خطُّ التماسّ الثاني الخارج من B، أي BA، مساوياً للخطّ BD.

[١٢] هذا ما يفرض $1 > k$.



الشكل ١٣-١٢

دراسة القضيتين ١٢ وَ ١٣

المعطيات: قطع مخروطيٌّ Γ ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$) مركزه H، خط التماسّ BD في نقطة B من Γ والنسبة $\frac{e}{g}$.

مسألة: المطلوب أن نـُخرِج خطّاً مماسّاً لـِ Γ يقطع BD على النقطة D، بحيث يكون معنا $\frac{DA}{DB}=\frac{e}{g}$، إذا كانت A نقطة التماسّ.

يتميَّز القطع Γ بالقطر $2.HB=d$، بالضلع القائم a المرفق به $\left(\frac{d}{a}=k\right)$ وبالزاوية α التي يشكـِّلها HB مع الاتِّجاه المرافق، وهي الزاوية التي تُسمَّى "زاوية الترتيب" (توجَد إمكانيّتان وفقاً لكون α حادَّة أو منفرجة).

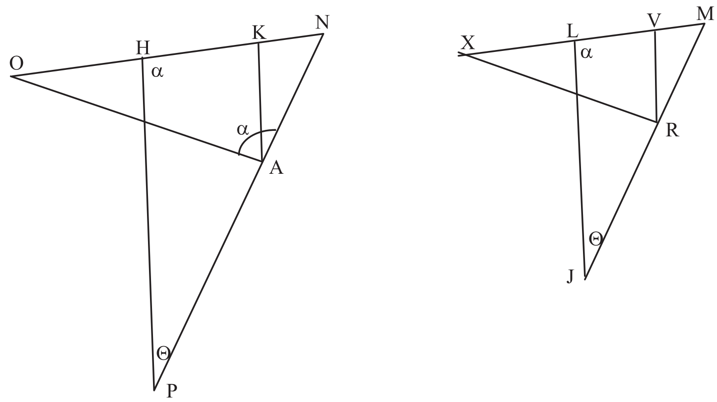
وهكذا يكون معلوماً في هذه المسألة: الخطُّ HB بوضعه وبطوله، النسبة $\frac{d}{a}=k$، الزاوية α والنسبة $\frac{e}{g}$.

لنلاحظ أنَّ ابن الهيثم لا يتناول ، في الحالة التي يكون فيها Γ قطعاً زائداً، سوى الفرع الذي يتضمَّن النقطة B.

ولقد قصد ابن الهيثم، في القضيتين ١٢ وَ ١٣ أن يُبيِّن أنَّ المسألة ترجع إلى رسم خطّ تماسّ يُشكـِّل زاوية معلومة مع HB، قطر القطع Γ.

١) إذا كان خطّ التماسّ في النقطة A حلاً للمسألة، وإذا كان يقطع القطر HB على النقطة P ويقطع القطر المرافق له على النقطة N، فإنَّ الزاوية $\widehat{HPN}$ معلومة لأنَّ المثلّث HPN مشابه لمثلّث يُمكن رسمه استناداً إلى معطيات المسألة.

يتناول ابن الهيثم في التحليل، لاستخلاص هذه النتيجة، المثلّثَ NOA المشابهَ للمثلّث HPN، كما يُقدِّم، في بداية التحليل واستناداً إلى المعطيات، رسمَ المثلّثين MXR وَ MJL المشابهين للمثلّثين NOA وَ HPN. يكون معنا حينئذ $\Theta = \widehat{NPH} = \widehat{MJL}$، وهذه الزاوية لا تتعلّق إلا بالمعطيات.



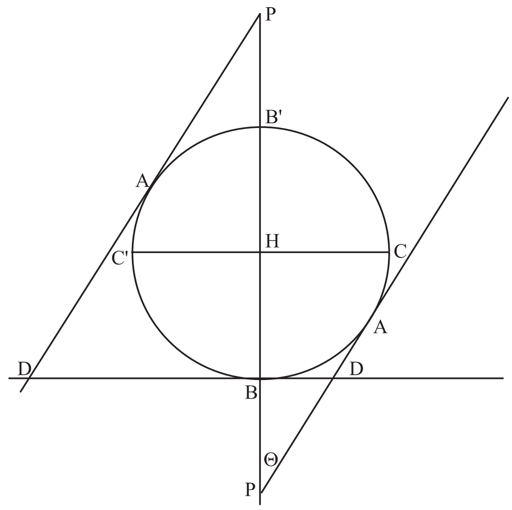
الشكل ١٣-١٣

يُذكِّــر ابن الهيثم بأننا، وفقاً للقضيتين ٥٧ وَ ٥٩ من المقالة الثانية، نعرف كيف نرسم خطّاً مماسّاً للقطع Γ بحيث يكون $\Theta = \widehat{NPH}$.

ثمَّ يُبيِّن أنــَّه، إذا كان $\Theta = \widehat{NPH}$، فإنَّ خطّ التماس يُشكــِّل حلاً للمسألة، أي أنــَّه يُحقــِّق المعادلة: $\frac{DA}{DB} = \frac{e}{g}$.

ملاحظات:

١) إذا كان القطع Γ دائرة، مع العلم أنَّ خطَّ التماسّ في B معلومٌ مهما كانت النقطة A إلا إذا كانت A في B' على القطر HB، فإنَّ خطّ التماسّ في A يقطع خطّ التماسّ في B على النقطة D ويكون معنا $\frac{DA}{DB} = 1$ فيكون $\frac{e}{g} = 1$.



الشكل ١٣-١٤

٢) يكتب ابن الهيثم "نخرج اد على استقامة في جهة د، فهو يلقى حب ، فليلقه على نقطة ف"[١٣]. وهذا صحيح في حالة القطع الزائد إذا تناولنا فرع $\mathcal{H}$ الذي توجَد عليه النقطة B. أمّا في حالة القطع الناقص (وفي حالة الدائرة أيضاً)، فيُمكن أن توجَد لدينا عدة أوضاع. ليكن CC' القطر المُرفــَق بــ BHB'. إذا كانت A في C أو في C'، يكون خطّ التماسّ موازياً لـِ BH، فلا تكون P موجودة. وإذا كانت A على القوس $\widehat{BC}$ أو على القوس $\widehat{BC'}$، تكون P على امتداد AD من جهة D؛ والنقاط التي تدخل في الدراسة هي بالترتيب A، D، P وَ H، B ، P. ولكن إذا كانت A على القوس $\widehat{B'C}$ أو على القوس $\widehat{B'C'}$ تكون النقاط وفقاً للترتيب D، A، P وَ B، H، P. (انظر الأشكال لاحقاً).

إنــَّـه من المحتمل، إذاً، أن يكون ابن الهيثم قد فرض A على القوس $\widehat{CBC'}$. ولكننا نلاحظ أنَّ الاستدلال صالح لكل موضع للنقطة A غير مطابق لـِ C أو لـِ C'، بشرط أن نأخذ الزاوية $\alpha = \widehat{PBD} = \widehat{PHN}$ كـــ "زاوية ترتيب".

وإذا كان هناك، من جهة أخرى، نقطتان A متناظرتان بالنسبة إلى النقطة H، يكون خطّا التماسّ الخاصّان بهما متوازيين وتكون النقطتان P المرفقتان بهما متناظرتين بالنسبة إلى النقطة H، كما تكون النقطتان N المرفقتان بهما متناظرتين بالنسبة إلى النقطة H.

[١٣] انظر ص. ٢٢٣.

ويكون الطولان DN المرفقان بهما متساويين، فتكون النسبة $\frac{ND}{NH}$ هي نفسها للنقطتين المعنيتين بالأمر؛ وكذلك هي الحال بخصوص النسبة $\frac{DA}{DB}$ ، لأنَّ $\frac{DA}{DB}=\frac{DN}{HN}$.

وتكون هذه النتيجة مُحقَّـقة في حالة القطع الزائد وفي حالة القطع الناقص أيضاً.

وهكذا يوجَد، لكل نقطتين على Γ متناظرتين بالنسبة إلى النقطة H، خطّا تماسّ متوازيان مُرفَقان بهاتين النقطتين، فيكون معنا نفس الزاوية $\Theta=\widehat{NPH}$ ونفس النسبة $\frac{DA}{DB}$.

وهذا ما يبيِّن السبب الذي جعل ابن الهيثم يتناول فرعاً من القطع الزائد فقط أو نصف قطع ناقص فقط.

٣) يُدخِل ابن الهيثم، انطلاقاً من المعادلتين $\frac{HP}{IP}=\frac{NH}{IA}=\frac{HB^2}{k.IA^2}$، العبارة $\sigma=k.IA^2$، حيث تكون k معلومة؛ ولكنَّ σ غير معلومة لأنَّ IA غير معلومة. كما يُدخِل العبارة $q=\frac{HB^2}{k}=\Delta^2$، حيث تكون q معلومة لأنَّ k وَ HB معلومتان، وتكون Δ أيضاً معلومة.

يكون معنا عندئذ :

$$\frac{NH}{IA}=\frac{HB^2}{\sigma}=\frac{q}{IA^2}. \qquad (١)$$

نستنتج من (١) :

$$NH.AI=q \quad (\text{أو } NH.HK=q \text{، لأنَّ } HK=IA) \qquad (٢)$$

وَ $\frac{q}{HB^2}=\frac{IA^2}{\sigma}$، أي أنَّ:

$$\frac{NH.HK}{HB^2}=\frac{IA^2}{\sigma}=\frac{1}{k}. \qquad (٣)$$

ما هي فائدة إدخال σ، q وَ Δ التي لا يتحدَّث عنها ابن الهيثم بعد ذلك؟ وقد لا يتطلّب الحساب المؤدّي إلى (٢) وَ (٣) أكثر من عدة سطور بدون استخدام σ أو q ، ولكنَّ معالجة النِّسب تستلزِم غالباً إدخال مثل هذه المقادير.

٤) إذا رمزنا بِـ d إلى BB'، قطر القطع Γ ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$)، و بِـ a إلى الضلع القائم المرفق به، وإذا رمزنا بِـ d' إلى القطر CC' المرفق بالقطر BB' ، و بِـ a' إلى الضلع القائم المرفق به، يكون معنا عندئذ: $k = \frac{d}{a} = \frac{d'}{a'}$، فيكون $\frac{d'}{a'} = \frac{1}{k}$.

يُعرِّف ابن الهيثم القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ والقطع الناقص $\mathcal{E}_1$ ذا القطر وذا الضلع القائم ، بحيث يكون $\frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{k} = \frac{d'}{a'}$.

إنَّ هذا لا يكفي لتعريف $\mathcal{H}_1$ أو $\mathcal{E}_1$، ولكنَّ من الواضح أنَّ ابن الهيثم يفترض بالإضافة إلى ذلك أنَّ القطر المرفق بِـ HN موازٍ لِـ HB، لأنَّــه يأخذ AK كخطّ الترتيب للنقطة A (غير أنَّ $AK \parallel HB$).

يكون القطع $\mathcal{H}_1$ (أو $\mathcal{E}_1$)، نتيجة لذلك، مشابهاً للقطع Γ ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$) المعلوم في المسألة.

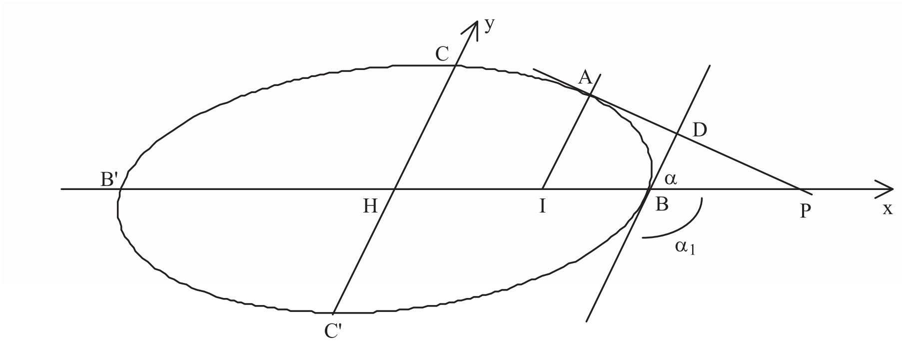
٥) يُقدِّم ابن الهيثم، في القسم المكرَّس للمناقشة، توضيحات حول الأعمال المساعدة التي تدخل في المسألة مع $e \neq g$. وهو يتفحَّص عدداً من الحالات الخاصَّة عندما يكون Γ قطعاً ناقصاً، ولكنــَّه لا يُعالج مسألة وجود خطّ تماسّ مُحقــِّق لشروط نصّ القضية: هل يكون للمسألة المطروحة حلٌّ، لكل قيمة معلومة للنسبة $\frac{e}{g}$؟

الدراسة التحليلية للمسألة:

أ) ليكن Γ قطعاً ناقصاً ذا مركز H ، وليكن BB' قطراً.

لنأخذ نقطة A على نصف القطع الناقص CBC'. لنضع $d = BB'$ وَ $k = \frac{d}{a}$، حيث يكون a الضلع القائم الخاصّ بِـ d. معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى المحورين BH وَ CH، هي

$\frac{d^2}{4}=x^2+k.y^2$. إذا كان AP خطّ التماسّ في A، يكون معنا : $HB^2=HI.HP$. لتكن (x_1, y_1) إحداثيتا النقطة A؛ يكون معنا $0<x_1$ وَ $\frac{d^2}{4x_1}=HP$.



الشكل١٣ـ١٥

ويكون معنا أيضاً $k.AI^2=HI.IP$، فيكون $\frac{k.y_1^2}{x_1}=IP$. معادلة خطّ التماسّ في A هي: $y-y_1=(x-x_1)\frac{-x_1}{k.y_1}$. والنقطة D، على هذا الخطّ، لها الإحداثية الأولى $\frac{d}{2}$، فيكون:

$$\overline{BD}=y_1+(\frac{d}{2}-x_1).\frac{-x_1}{k.y_1}=\frac{k.y_1^2+x_1^2-\frac{d}{2}x_1}{k.y_1}\text{،}$$

$$\overline{BD}=\frac{d}{2k.y_1}.(\frac{d}{2}-x_1)$$ ($\overline{BD}$ لها نفس إشارة y_1).

يكون معنا: $\frac{AD}{IB}=\frac{AP}{IP}$، فنحصل على $AD=AP.\frac{(\frac{d}{2}-x_1).x_1}{k.y_1^2}$، $\frac{e}{g}=\frac{AD}{BD}=\frac{2x_1.AP}{d.|y_1|}$.

ولكنَّ $AP^2=AI^2+PI^2-2IA.IP.\cos\alpha=y_1^2+\left(\frac{k.y_1^2}{x_1}\right)^2-2|y_1|\frac{k.y_1^2}{x_1}\cos\alpha$

$$=\frac{y_1^2}{x_1^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k\,|y_1|\,x_1.\cos\alpha\right]\text{،}$$

مع $\alpha<\frac{\pi}{2}$ عندما تكون $A\in BC$ وَ $\alpha>\frac{\pi}{2}$ عندما تكون $A\in BC'$.

يكون معنا إذاً: $\frac{e^2}{g^2}=\frac{4}{d^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k\,|y_1|\,x_1.\cos\alpha\right]$. ولكنَّ $\frac{d^2}{4}=k.y_1^2+x_1^2$،

فيمكن إذاً أن نكتب، إذا افترضنا أنَّ $x_1 \neq 0$ وإذا وضعنا $t = \frac{y_1}{x_1}$، مع $0 < t$:

$$\frac{e^2}{g^2} = \frac{x_1^2 + k^2.y_1^2 - 2k\,|y_1|\,x_1.\cos\alpha}{x_1^2 + k.y_1^2} = \frac{1 + k^2 t^2 - 2k\,t.\cos\alpha}{1 + k\,t^2} \quad \text{مع} \quad \frac{d^2}{4x_1^2} = 1 + k\,t^2 .$$

وهكذا تُكتب المعادلة للمتغيِّر t:

$$(*) \qquad k.\left(\frac{e^2}{g^2} - k\right)t^2 + 2k\,t.\cos\alpha + \frac{e^2}{g^2} - 1 = 0 \text{؛}$$

ويكون مميِّزها : $\Delta = k.\left[k.\cos^2\alpha - \left(\frac{e^2}{g^2} - k\right)\left(\frac{e^2}{g^2} - 1\right)\right]$ ، وهو موجب ومساوٍ لـ $k^2.\cos^2\alpha$

عندما يكون $\frac{e^2}{g^2} = 1$ أو k. وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ: $\Delta = k.\left[-\frac{e^4}{g^4} + \frac{e^2}{g^2}(1+k) - k.\sin^2\alpha\right]$،

نرى أنَّ Δ تنعدم عندما تأخذ النسبة $\frac{e^2}{g^2}$ إحدى القيمتين m وَ M ، كما تبقى Δ موجبة بين هاتين القيمتين؛ وتوجَد القيمتان 1 وَ k في الفسحة $[m, M]$. فيكون للمعادلة $(*)$ جذران عندما يكون $\sqrt{m} \leq \frac{e}{g} \leq \sqrt{M}$، ويتطابق هذان الجذران مع طرفي هذه الفسحة. ويساوي جداؤهما:

$$k.\frac{\frac{e^2}{g^2} - 1}{\frac{e^2}{g^2} - k}$$

وهو سالب عندما تكون النسبة $\frac{e}{g}$ بين 1 وَ $\sqrt{k}$؛ فيكون للمعادلة $(*)$ عندئذ جذرٌ موجب t_0 يُقابله حلّ A على القوس $\widehat{BC}$ وحلّ A' على القوس $\widehat{BC'}$. وإذا كانت النسبة $\frac{e}{g}$، بعكس ذلك، في الفسحة $\sqrt{m} \leq \frac{e}{g} \leq \sqrt{M}$ وليس بين 1 وَ $\sqrt{k}$، فإنَّ لجذري المعادلة $(*)$ الإشارة نفسها؛ ويجب أن يكون نصف مجموعهما، $\frac{\cos\alpha}{k - \frac{e^2}{g^2}}$ ، موجباً، لكي يكونا مقبولين. ويعني هذا الشرط أنَّ $\frac{e}{g} > \sqrt{k}$ إذا كان $\alpha < \frac{\pi}{2}$ وأنَّ $\frac{e}{g} < \sqrt{k}$ إذا كان $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ؛ ويكون معنا في هذه الحالة حَلان t_0 وَ t_1 يخصّان نقطتين على نفس القوس $\widehat{BC}$ وَ $\widehat{BC'}$.

وتصبح المعادلة $(*)$ من الدرجة الأولى، في الحالة الحدِّيّة التي يكون فيها $\sqrt{k}=\frac{e}{g}$:

$2k\,t.\cos\alpha+k-1=0$، فيكون $t=\frac{1-k}{2k.\cos\alpha}$، فلا نحصل على حلّ، إلا إذا كان لِـ $(1\text{-}k)$ وَ $\cos\alpha$ الإشارة نفسها، أي إذا كان $1>k$ عندما يكون $\alpha<\frac{\pi}{2}$ أو إذا كان $1<k$ عندما يكون $\alpha>\frac{\pi}{2}$. وإذا كان $\alpha=\frac{\pi}{2}$، فإنَّ المعادلة تتطلب $1=k$، وهذا ما يجعل t غير محدَّدة؛ ويكون القطعُ الناقص، في هذه الحالة، دائرة ويكون $\frac{e}{g}=1$، إذ إنَّ خطي التماسّ الخارجين من أيّ نقطة متساويان دائماً.

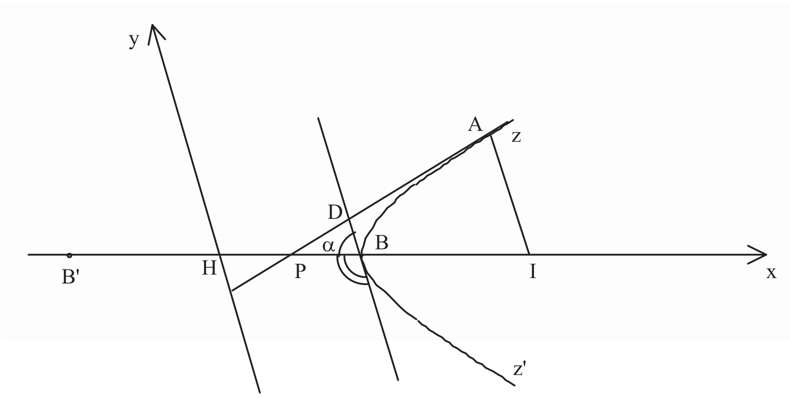
وتصبح المعادلة $(*)$، في الحالة الحدِّيّة التي يكون فيها $\frac{e}{g}=1$، $k\,t.\left[\left(\frac{e^2}{g^2}-k\right)t+2\cos\alpha\right]=0$،

والحلُّ $t=0$ يخصُّ النقطة B، رأسَ القطع الناقص.

ونحصل بالحساب على: $m=\frac{1+k-r}{2}$ ، $M=\frac{1+k+r}{2}$

مع $1+2.k.\cos 2\alpha+k^2=(1+k)^2-4.k.\sin^2\alpha=r^2$.

ب) ليكن Γ فرعاً من قطع زائد، وليكن $d=BB'$ ، a الضلع القائم وَ $k=\frac{d}{a}$.



الشكل ١٣-١٦

يكون لدينا معادلة فرع القطع الزائد: $\frac{d^2}{4}=x^2-k.y^2$ مع $x>\frac{d}{2}$.

يكون معنا أيضاً $HB^2=\overline{HI}.\overline{HP}$ ، $\overline{HI}>0$ ، $\overline{HP}>0$ وَ $\overline{IH}.\overline{IP}=k.AI^2$ ، $\overline{HI}<0$ ، $\overline{HP}<0$ ،

فنحصل على $HP=\frac{d^2}{4x_1}$ و $IP=\frac{k.y_1^2}{x_1}$.

وتكون معادلة خطّ التماسّ في A: $y-y_1=\frac{x_1}{k.y_1}(x-x_1)$؛ ويكون

$x=\frac{d}{2}\Leftarrow y=\overline{BD}=y_1+\frac{x_1}{k.y_1}.(\frac{d}{2}-x_1)=\frac{k.y_1^2-x_1^2+\frac{d}{2}x_1}{k.y_1}$، فيكون إذاً: $\overline{BD}=\frac{d}{2k.y_1}.(x_1-\frac{d}{2})$،

($\overline{BD}$ لها إشارة y_1).

يكون معنا: $AI\,//\,BD \Leftarrow \frac{AD}{IB}=\frac{AP}{IP} \Leftarrow AD=AP.\frac{(\frac{d}{2}-x_1).x_1}{k.y_1^2}$، فنحصل على

$\frac{2x_1.AP}{d.|y_1|}=\frac{AD}{BD}=\frac{e}{g}$.

ولكنَّ $AP^2=AI^2+PI^2-2IA.IP.\cos\alpha = y_1^2+\left(\frac{k.y_1^2}{x_1}\right)^2-2|y_1|\frac{k.y_1^2}{x_1}\cos\alpha$

$=\frac{y_1^2}{x_1^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k\,|y_1|.x_1.\cos\alpha\right]$،

فيكون $\frac{e^2}{g^2}=\frac{4}{d^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k\,|y_1|.x_1.\cos\alpha\right]$، مع $x_1^2-k.y_1^2=\frac{d^2}{4}$؛

وإذا وضعنا $t=\frac{|y_1|}{x_1}$، يكون معنا: $\frac{e^2}{g^2}=f(t)=\frac{1+k^2t^2-2k\,t.\cos\alpha}{1-k\,t^2}$، مع $1-\frac{d^2}{4x_1^2}=k\,t^2$.

وهكذا تُكتب المعادلة للمتغيِّر t:

$$k.\left(\frac{e^2}{g^2}+k\right)t^2-2k\,t.\cos\alpha+1-\frac{e^2}{g^2}=0 \qquad (**)$$؛

ويكون مميِّزها : $\Delta=k.\left[k.\cos^2\alpha-\left(\frac{e^2}{g^2}+k\right)\left(1-\frac{e^2}{g^2}\right)\right]$ ،

وهو موجب ومساوٍ لـ $k^2.cos^2\alpha$ عندما يكون $\frac{e^2}{g^2}=1$ أو k. وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ:

$\Delta=k.\left[\frac{e^4}{g^4}+(k-1)\frac{e^2}{g^2}-k.\sin^2\alpha\right]$، سالبٌ عندما يكون $\frac{e^2}{g^2}=0$، نرى أنَّ Δ تنعدم عندما

تأخذ النسبة $\frac{e^2}{g^2}$ قيمة وحيدة $0 < m$، محصورة بين 0 وَ 1. ولكي تكون Δ موجبة يجب ويكفي أن يكون $\frac{e}{g} \leq \sqrt{m}$؛ فيكون عندئذ للمعادلة (**) جذران يتطابقان عندما يكون $\frac{e}{g} = \sqrt{m}$. وتكون إشارة جداء هذين الجذرين مطابقة لإشارة $\left(1-\frac{e^2}{g^2}\right)$؛ وعندما يكون $\frac{e}{g} > 1$، يكون أحدُ الجذرين موجباً، فنحصل على حلّين A وَ A' للمسألة، حيث تكون هاتان النقطتان وفقاً للترتيب على القوسين $\widehat{BZ}$ وَ $\widehat{BZ'}$. وإذا كان معنا، بعكس ذلك، $\sqrt{m} < \frac{e}{g} < 1$ يكون للجذرين إشارة $cos\ \alpha$ ، فلا يوجَد حلّ إلا عندما يكون $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

وإذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2}$، فإنَّ المعادلة تتطلب $\frac{e}{g} > 1$. ونحصل بالحساب على: $m = \frac{1-k+r}{2}$ ، مع $k^2 - 2.k.\cos 2\alpha + 1 = (k-1)^2 + 4.k.\sin^2 \alpha = r^2$.

ويوجد حلان عندما يكون $\sqrt{m} < \frac{e}{g}$، وهما على القوس $\widehat{BZ}$ إذا كان $\sqrt{m} < \frac{e}{g} < 1$، ولكن عندما يكون $\frac{e}{g} > 1$ فإنَّ أحد الحلّين يكون على $\widehat{BZ}$ بينما يكون الآخر على $\widehat{BZ'}$. وإذا كان $\sqrt{m} = \frac{e}{g}$ نحصل على حلّ مزدوج؛ وإذا كان $\frac{e}{g} = 1$ يوجد حلٌ على القوس $\widehat{BZ}$ ؛ أما الحلّ الآخر الذي يخصُّ $t = 0$، فهو يتطابق مع النقطة B (هذه هي الحالة المُتـــرَدِّيَة).

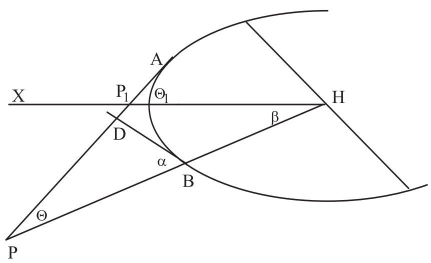
لقد كان هدف ابن الهيثم أن يُبيِّن أنَّ حلّ المسألة المطروحة هنا يُستخرَج من القضية ٥٠ من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات": إخراج خطّ تماسّ، على قطع مخروطيّ معلوم، بحيث يُشكِّل مع المحور من جهة القطع المخروطيّ زاوية مساوية لزاوية حادّة معلومة Θ_1. تكون القضية ٥٠ قابلة للحل في حالة القطع الناقص لكلّ زاوية حادَّة؛ أما في حالة القطع الزائد، فلا يوجَد حلّ للمسألة إلا إذا كانت الزاوية Θ_1 أعظم من الزاوية الحادَّة المشكـــَّلة بين الخطّ المقارَب والمحور.

يكون القطر الذي نتناوله هنا قطراً مُجانباً HB يُفترَض أن يكون مختلفاً عن المحور HX.

يقطع خطُّ التماسّ المطلوب DA، على النقطة D، خطَّ التماسّ في B، ويقطع القطر HB في P.

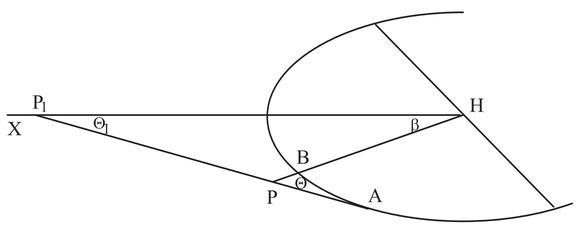
يُبيِّن ابن الهيثم في التحليل، مُستخدماً الرسم المساعِد المدروس في بداية التركيب، أنـَّه إذا كانت النسبة $\frac{DA}{DB} = \frac{e}{g}$ معلومة، فإنَّ الزاوية $\Theta = \widehat{APB}$ تكون معلومة؛ وهو يقول في التركيب إنَّ Θ_1 تكون معلومة إذا كانت Θ معلومة.

لتكن β الزاوية التي يُشكِّلها HX مع HB، فيكون بين Θ (زاوية خط التماسّ AP مع HB)، Θ_1 (زاوية خط التماسّ AP مع HX) وَ β علاقات مرتبطة بحالة الشكل وخاصّة بالزاوية $\widehat{PBD} = \alpha$.



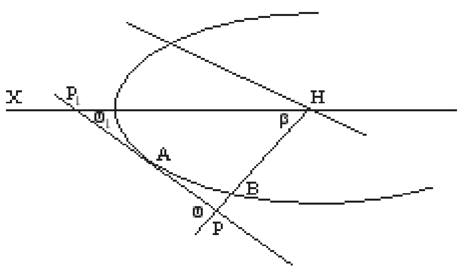
الشكل ١٣-١٧-ا

$\Theta_1 - \beta = \Theta$ ، α حادّة



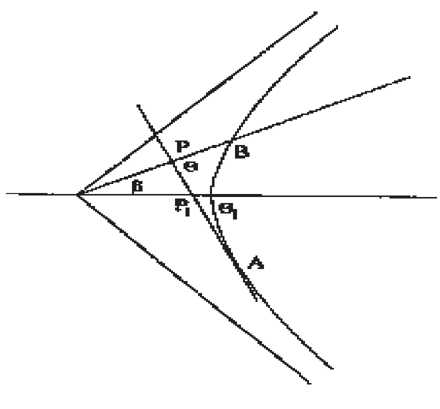
الشكل ١٣-١٧- ب

$\Theta_1 + \beta = \Theta$، α منفرجة



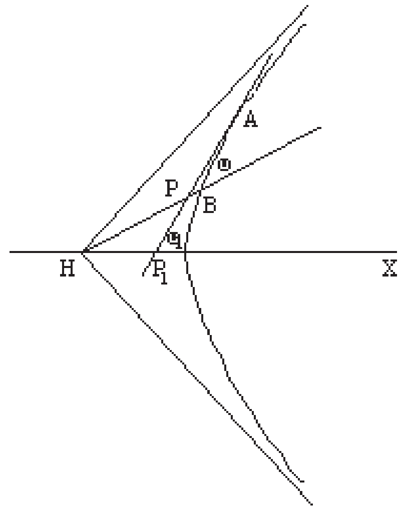
الشكل ١٣-١٧- جـ

$\pi - (\Theta_1 + \beta) = \Theta$ ، α منفرجة



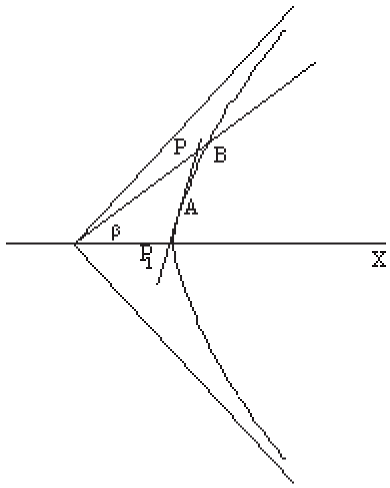
الشكل ١٣-١٧- د

$\Theta_1 + \beta = \Theta$، α حادّة



الشكل ١٣-١٧- ه

$\Theta_1-\beta=\Theta$، α منفرجة



الشكل ١٣-١٧- و

$\Theta+\Theta_1-\beta=\pi$، α حادَّة

التحديد التحليلي للزاوية $\Theta_1+\beta=\Theta$

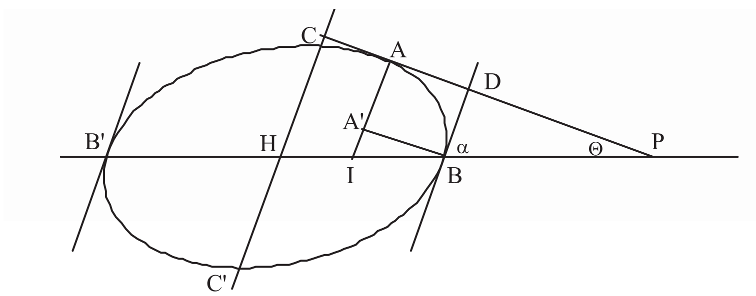
إنَّ تحديد Θ بواسطة رسم مساعد تُستخدم فيه المعطيات $k=\frac{d}{a}$، a وَ $\frac{e}{g}$، قد يتطلب مناقشة لم يقم بها ابن الهيثم ؛ وهي معقَّدة ، ويظهر تعقيدها في العلاقة التي تربط بين $\frac{e}{g}$، Θ، α وَ k.

حالة القطع الناقص

إنَّ لدينا:

(١) $k=\frac{IB.IB'}{AI^2}$ ، $HB^2=HI.HP$ ، $k=\frac{HI.IP}{AI^2}$.

يكون معنا إذاً: $\frac{DB}{PB}=\frac{AI}{PI}=\frac{HI}{k.AI}$ وَ $\frac{HB.BI}{HI}=HP-HB=PB$.



الشكل ١٣-١٨

ويكون من جهة أخرى: $\frac{DA}{BI}=\frac{\sin\alpha}{\sin\widehat{PAI}}$، مع $\widehat{PAI}=\widehat{PDB}=\pi-(\alpha+\Theta)$ (α حادّة أو منفرجة)،

فيكون $\sin(\alpha+\Theta)=\sin\widehat{PAI}$، ويكون معنا: $DA=\frac{BI.\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$ وَ $DB=\frac{HB.BI}{k.AI}$،

فنحصل على $\frac{e}{g}=\frac{DA}{DB}=\frac{k.AI}{HB}.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$. ولكنّ $\frac{HI}{k.AI}=\frac{AI}{PI}=\frac{\sin\Theta}{\sin(\alpha+\Theta)}$، فتُكتب (١)

على الشكل $k.AI^2=HB^2-HI^2$، فنحصل على $HB^2=\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}k^2.AI^2+k.AI^2$،

وَ $\frac{HB^2}{k.AI^2}=\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}.k+1$. يكون معنا عندئذ: $\frac{g^2}{e^2}=\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}.\left(1+\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}\right)$،

فيكون $\frac{g^2}{e^2}=\frac{k.\sin^2\Theta+\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}=f(\Theta)=\frac{\Phi(\Theta)}{k.\sin^2\alpha}$.

هذا الحساب صالح لكلّ موضع للنقطة A على القوس $\widehat{BC}$ ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) أو على القوس $\widehat{BC'}$ ($\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$). يكون معنا في الحالتين: $0\le\Theta\le\pi-\alpha$ وَ $\alpha\le\Theta+\alpha\le\pi$،

مع $\Theta=0\Leftarrow\frac{e}{g}=\sqrt{k}$ وَ $\Theta=\pi-\alpha\Leftarrow\frac{e}{g}=1$.

حالة القطع الزائد

إنّ لدينا:

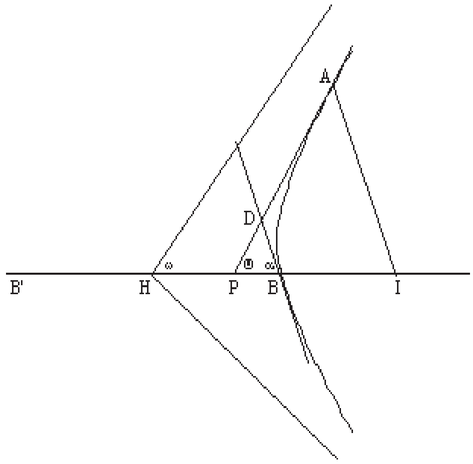
(١) $k=\frac{IB.IB'}{AI^2}\Leftrightarrow HI^2-HB^2=k.AI^2\Leftrightarrow HI^2-k.AI^2=HB^2$،

وَ $HI.HP=HB^2$، $HI.HP=k.AI^2$.

نستخرج من ذلك: $PB=HB-HP=HB-\frac{HB^2}{HI}=\frac{HB.BI}{HI}$،

فيكون، كما كان في حالة القطع الناقص: $DB=\frac{HI.HB}{kAI}$.

ويكون معنا أيضاً $DA=BI.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$، فيكون $\frac{e}{g}=\frac{kAI}{HB}.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$.



الشكل ١٣-١٩

ولكنَّ $\frac{HI}{k.AI}=\frac{AI}{PI}=\frac{\sin\Theta}{\sin(\alpha+\Theta)}$ ، كما نستنتج من (١) أنَّ:

$$HB^2=k.AI^2-k^2.AI^2\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}=k.AI^2\left(\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}-1\right)،$$

فنحصل على $\frac{g^2}{e^2}=\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}.\left(\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}-1\right)$،

فيكون $\frac{g^2}{e^2}=\frac{k.\sin^2\Theta-\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}=g(\Theta)=\frac{\Psi(\Theta)}{k.\sin^2\alpha}$.

وهذا الحساب صالح سواء أكانت α حادَّة أو منفرجة.

تكتب العلاقة، بين Θ، α ، k وَ $\frac{e}{g}$ إذاً كما يلي:

$$k.\sin^2\Theta+\varepsilon.\sin^2(\alpha+\Theta)=k.\frac{g^2}{e^2}.\sin^2\alpha \quad (١)$$

حيث يكون $\varepsilon=1$ في حالة القطع الناقص، ويكون $\varepsilon=-1$ في حالة القطع الزائد. وتصبح هذه العلاقة أكثر بساطة، إذا استخدمنا الزاوية Θ_1 التي يُشكّلها خط التماسّ المطلوب مع المحور الرئيسيّ للقطع المخروطيّ. لتكن $\frac{b}{a}=c$ النسبة بين المحورين $(0<c\leq 1)$، وليكن p ظلّ زاوية انحدار القطر BH؛ تُكتَب معادلة القطع المخروطيّ بالنسبة إلى المحورين XH وَ YH،

بالفعل، كما يلي: $x^2+\varepsilon.\frac{y^2}{c^2}=a^2$؛ ويكون ظلّ زاوية الانحدار للقطر المرفق بـ CH مساوياً لـ $-\varepsilon\frac{c^2}{p}$. لنحسب $\frac{HB^2}{HC^2}=k$، فنكتب $(1+p^2)\frac{a^2}{1+\frac{\varepsilon.p^2}{c^2}}=HB^2$، $\varepsilon.(1+\frac{c^4}{p^2})\frac{a^2}{1+\frac{\varepsilon.p^2}{c^2}}=HC^2$؛

وهكذا يكون: $k=\frac{1+p^2}{p^2+c^4}c^2$.

ولنحسب الآن الزاوية α عن طريق حساب ظلّها: $\frac{1}{p}\frac{p^2+\varepsilon c^2}{1-\varepsilon c^2}- = \frac{-\varepsilon\frac{c^2}{p}-p}{1-\varepsilon c^2} = \text{tg}\,\alpha$.

وتكتَب العلاقة (١) كما يلي:

$$(k+\varepsilon.\cos 2\alpha).\cos 2\Theta-\varepsilon.\sin 2\alpha.\sin 2\Theta)=k+\varepsilon-k.\frac{g^2}{e^2}.(1-\cos 2\alpha) \quad (٢)$$ ،

مع $\sin 2\alpha=-2p\frac{(p^2+\varepsilon c^2)(1-\varepsilon c^2)}{(1+p^2)(p^2+c^4)}$، $\cos 2\alpha=\frac{(p(1-p)-\varepsilon c^2(1+p))(p(1+p)+\varepsilon c^2(1-p))}{(1+p^2)(p^2+c^4)}$.

وهكذا نجد:

$$k+\varepsilon\cos 2\alpha=\frac{(1-\varepsilon c^2)(c^2+\varepsilon p^2)}{p^2+c^4}.\frac{1-p^2}{1+p^2}$$

$$\varepsilon\sin 2\alpha=-\frac{(1-\varepsilon c^2)(c^2+\varepsilon p^2)}{p^2+c^4}.\frac{2p}{1+p^2}$$ ،

فتصبح المعادلة (٢):

$$(1-\varepsilon c^2)\cos 2(\Theta-\beta)=1+\varepsilon c^2-2c^2\frac{G^2}{E^2}\frac{c^2+\varepsilon p^2}{p^2+c^4} \quad (٣)$$ ،

مع $p=tg\,\beta$ (β هي الزاوية المحصورة بين HX و HB).

وهذا ما تَمْكُن كتابته، بعبارة أخرى:

$$\cos 2\Theta_1=\frac{1+\varepsilon c^2}{1-\varepsilon c^2}-\frac{2c^2}{1-\varepsilon c^2}\frac{G^2}{E^2}\frac{c^2+\varepsilon p^2}{p^2+c^4} \quad (٤)$$.

وهذا ما يُعطي الشرط التالي، لكي تكون المعادلة ممكنة:

$\left|\frac{1+\varepsilon c^2}{1-\varepsilon c^2}-\frac{2c^2}{1-\varepsilon c^2}.\frac{g^2}{e^2}.\frac{c^2+\varepsilon.p^2}{p^2+c^4}\right|\leq 1$، أو $\varepsilon c^2\leq c^2.\frac{g^2}{e^2}.\frac{c^2+\varepsilon.p^2}{p^2+c^4}\leq 1$.

ويصبح هذا الشرط في حالة القطع الناقص:

(٥-١) $c^2.\frac{c^2+p^2}{p^2+c^4} \le \frac{e^2}{g^2} \le \frac{c^2+p^2}{p^2+c^4}$؛

بينما يصبح في حالة القطع الزائد:

(٥-٢) $\frac{e^2}{g^2} \ge c^2.\frac{c^2-p^2}{p^2+c^4}$.

ونتحقّق أنّ طرفي المتباينة المزدوجة (٥-١) يتطابقان مع m وَ M الواردتين في المناقشة السابقة، كما يتطابق أيضاً طرف المتباينة (٥-٢) مع m الواردة في المناقشة السابقة.

وإذا كان الشرط (٥-١) محقــّقاً في حالة القطع الناقص، تـُحدِّد المعادلة (٤) زاوية حادَّة وحيدة Θ_1، فنحصل على حلّ للمسألة.

وتكتَب المعادلة (٤)، في حالة القطع الزائد، على الشكل الآخر التالي:

(٦) $\cos 2\Theta_1 = \cos 2\omega_1 - \frac{g^2}{e^2}.c.\frac{c^2-p^2}{p^2+c^4}.\sin 2\omega_1$،

حيث تكون ω_1 زاوية التي يُشكــِّلها الخطّ المقارَب مع HX؛ وتــُحدِّد هذه المعادلة زاوية حادّة Θ_1 أعظم من ω_1، لأنَّ طرفها الأيمن أصغر من $\cos 2\omega_1$.

وهكذا رأينا، خلال هذه المناقشة للمسألة ١٣، أنَّ ابن الهيثم لم يعالج مسألة وجود خطّ التماسّ الذي يُحقــِّق الشروط المطلوبة في نصّ القضية. ويُمكن صياغة هذه المسألة على الشكل التالي:

إذا كان القطعُ المخروطيّ Γ معلوماً، وإذا كانت النقطة B معلومة، وهذا ما يجعل إذاً k وَ α معلومتين، هل تكون المسألة قابلة للحلّ لكلّ قيمة للنسبة $\frac{e}{g}$؟

لنتناول من جديد هذه المسألة نفسها.

– إذا كان القطع Γ دائرة، تكون المسألة مستحيلة عندما يكون $\frac{e}{g} \neq 1$، وتكون غير محدَّدة(سَيّالة) عندما يكون $\frac{e}{g} = 1$، ويقابل كلّ خطّ تماسّ زاوية حادَّة $\Theta = \widehat{APB}$ ونسبة $1 = \frac{e}{g} = \frac{DA}{DB}$.

وتبقى $\frac{e}{g}$ ثابتة عندما تتغيَّر Θ.

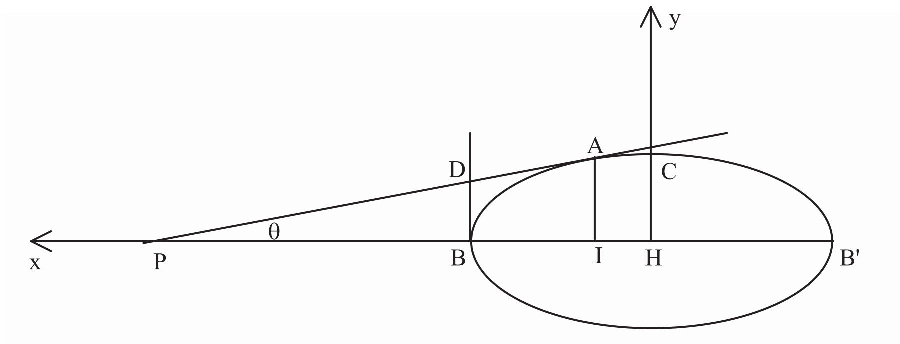
- وإذا كان القطع Γ قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً، تتغيّر النسبة $\frac{e}{g}$ عندما تتغيَّر النقطة A.

لنأخذ كمثال قطعاً ناقصاً ذا محور $B'HB$، فيكون عندئذ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ وَ $k = 1$. نحن نعلم أنَّ:

$$k = \frac{IB.IB'}{AI^2}، \quad (١)$$

$$HI.HP = HB^2 \quad (٢)$$

$$k = \frac{HI.HP}{AI^2}. \quad (٣)$$



الشكل ١٣-٢٠

لنفرض أنَّ I موجودة بين H وَ B، مع $x = HI$ وَ $0 < x < \frac{d}{2}$.

تعطينا المعادلة (١)، إذا استخدمنا المَعْلَم (Hx, Hy):

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2 = k.y^2 \quad (٤)$$ معادلة Γ.

نستخرج من (٣) المعادلة: $tg\Theta = \frac{AI}{PI} = \frac{HI}{k.AI}$، فنحصل على

$$tg\Theta = \frac{x}{k.y}. \quad (٥)$$

يكون معنا: $DA = \frac{BI}{\cos\Theta}$ ، $PB.tg\Theta = DB$، فنحصل على $\frac{e}{g} = \frac{DA}{DB} = \frac{BI}{PB.\sin\Theta}$.

ونستخرج من (٢): $\frac{HB^2}{HI} = HP$ وَ $\frac{HB^2}{HI} - HB = HP - HB = PB$، فيكون

$$\frac{HB.BI}{HI} = \frac{HB}{HI}(HB - HI) = PB \; .$$

فنستخرج من ذلك أنَّ :

$$(٦) \qquad \frac{2x}{d.\sin\Theta} = \frac{HI}{HB.\sin\Theta} = \frac{e}{g} \; .$$

ونستخرج من (٥) وَ (٤): $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{k}.\frac{x^2}{tg\Theta}$، فنحصل على $\frac{d^2}{4x^2} = 1 + \frac{1}{k\,tg\Theta}$.

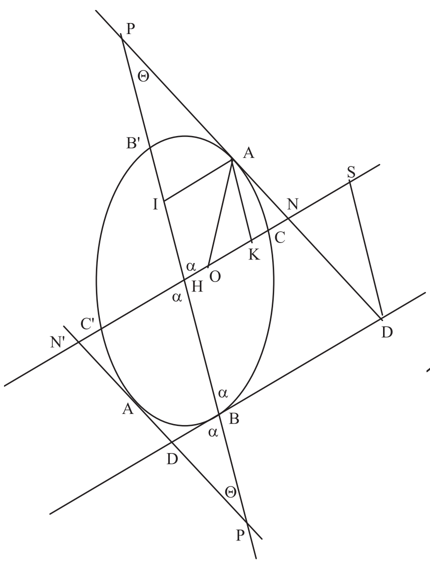
ونستخرج من (٦) عندئذ: $\frac{g^2}{e^2} = \frac{(1+k\,tg^2\Theta)\sin^2\Theta}{k\,tg^2\Theta}$،

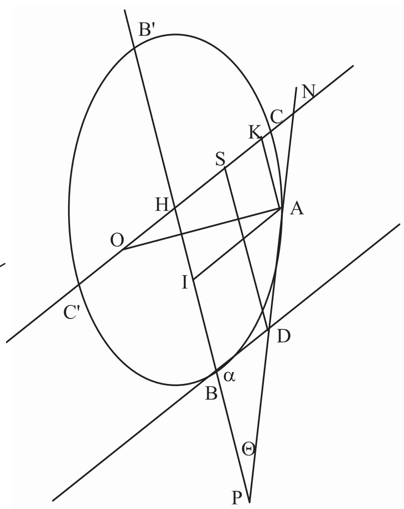
$$\frac{g^2}{e^2} = \frac{(1+k\,tg^2\Theta)\cos^2\Theta}{k} = \frac{\cos^2\Theta + k.\sin^2\Theta}{k} = \frac{(k-1).\sin^2\Theta + 1}{k} \; .$$

تكون النسبة $\frac{e}{g}$ إذاً دالّة للمتغيِّر Θ، عندما تكون k معلومة مع $1 > k$. وعندما ترسم A القوس $\widehat{BC}$، تتناقص Θ من $\frac{\pi}{2}$ إلى 0؛ فيتناقص $\sin\Theta$ من 1 إلى 0، فتتناقص النسبة $\frac{g^2}{e^2}$ من 1 إلى $\frac{1}{k}$؛ فتتزايد النسبة $\frac{e}{g}$ من 1 إلى $\sqrt{k}$.

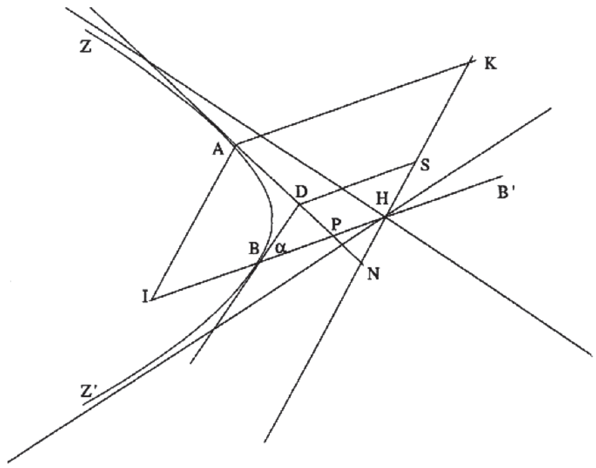
وهكذا لا تكون المسألة ممكنة، إلا إذا كان $1 \le \frac{e}{g} \le \sqrt{k}$.

لنأخذ الآن قطعاً ناقصاً ذا قطر اختياريّ BHB'. لنفترض أنَّ $1 < k$. تبقى المعادلات (١)، (٢) وَ (٣) صحيحة في هذه الحالة.





الشكل ١٣-٢١-ا الشكل ١٣-٢١-ب



الشكل ١٣-٢١- جـ

يقطع خطُّ التماسّ في كلّ نقطة من فرع القطع الزائد الخطَّ BH بين H وَ B.

إذا كانت $A\in BZ$، تكون $\widehat{PBD}=\alpha$ حادّة.

إذا كانت $A\in BZ'$، تكون $\widehat{PBD}=\alpha$ منفرجة.

يكون معنا: $\frac{DB}{PB}=\frac{AI}{PI}=\frac{HI}{k.AI}$ وَ $\frac{HB.BI}{HI}=HP-HB=PB$؛

ولكنّ $\frac{DA}{BI}=\frac{\sin\alpha}{\sin\widehat{PAI}}$، $\pi-(\alpha+\Theta)=\widehat{PDB}=\widehat{PAI}$، $\sin(\alpha+\Theta)=\sin\widehat{PAI}$

فنحصل على: $BI.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}=DA$ وَ $\frac{HB.BI}{k.AI}=DB$، $\frac{e}{g}=\frac{DA}{DB}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}.\frac{k.AI}{HB}$،

ويكون $\frac{e}{g}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}.\frac{2k.y}{d}$.

ولكنّ

(٤) $$\frac{HI}{k.AI}=\frac{AI}{PI}=\frac{\sin\Theta}{\sin(\alpha+\Theta)}=\frac{x}{k.y}$$،

وَ

(٥) $$\left(\frac{d}{2}\right)^2=x^2+k.y^2$$ (معادلة القطع الناقص)

فنستنتج من (٤) وَ (٥): $\left(\frac{d}{2}\right)^2=k^2y^2\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}+k.y^2$،

فنحصل على: $\frac{d^2}{4ky^2}=1+\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}$.

يكون معنا عندئذ: $\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}\left[1+\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}\right]=\frac{d^2}{4k^2y^2}\cdot\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{\sin^2\alpha}=\frac{g^2}{e^2}$،

فنحصل على $\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)+\sin^2\Theta}{k.\sin^2\alpha}=\frac{g^2}{e^2}$.

وهكذا تكون $\frac{e}{g}$ دالّة للمتغيِّر Θ، عندما تكون k وَ α معلومتين[١٤]. والحساب يصلح عندما تكون A على $\widehat{BC}$ أو على $\widehat{BC'}$. وتكون الزاوية α حادّة عندما تكون A على $\widehat{BC'}$، وتكون α منفرجة عندما تكون A على $\widehat{BC}$.

ويكون معنا في كلتا الحالتين: $0\leq\Theta\leq\pi-\alpha$ وَ $\alpha\leq\Theta+\alpha\leq\pi$.

ويكون: $\Theta=0 \Leftarrow \sqrt{k}=\frac{e}{g}$ وَ $\Theta=\pi-\alpha \Leftarrow \frac{e}{g}=1$.

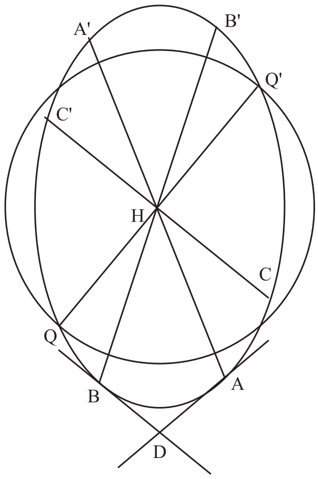
وهكذا تسمح هذه المناقشة، حول وجود الزاوية Θ، بأن نجد ثانية الشروط التي حصلنا عليها أعلاه بواسطة مناقشة جبرية.

تعالج مناقشة ابن الهيثم بعض الحالات فقط التي يكون فيها الحلّ ممكناً وبعض الحالات الأخرى التي يكون فيها الحلّ مستحيلاً؛ ولكنَّ مناقشته تبقى غير كاملة. وقد يصعب، من جهة أخرى، القيامُ بالمناقشة الكاملة لوجود نقطة التقاطع R، بالطرق الهندسية. ويُمكن أن نجد لكلّ هذه المسألة حلاً أكثر بساطة من الحلّ الذي بسطه ابن الهيثم[١٥]. يكفي بالفعل أن نتناول تقاطع الدائرة، ذات المركز H ونصف القطر $\frac{\sqrt{a.d}}{2}\cdot\frac{e}{g}$، مع القطع الناقص المعلوم أو مع القطع الزائد المُرفَق بالقطع الزائد المعلوم.

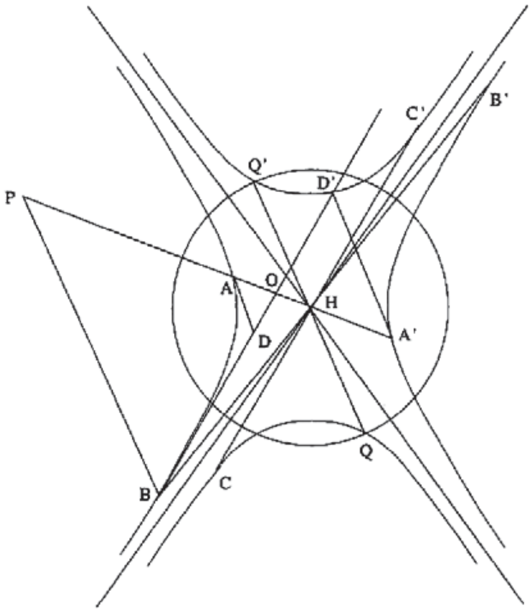
وإذا كان هذا التقاطع ممكناً، فإنــّه يُحَدِّد قطرين قد يكونان متطابقين مثل $Q'Q$. نتناول القطر $A'A$، المُرفق بالقطر $Q'Q$ في القطع المخروطيّ Γ، فتكون النقطة A حلاً للمسألة. يكون معنا بالفعل $\frac{HQ^2}{HC^2}=\frac{DA^2}{BD^2}$، وفقاً للقضية ١٧ من المقالة الثالثة من كتاب"المخروطات"؛

[١٤] إذا كان $\alpha=\frac{\pi}{2}$ نجد من جديد $\frac{g^2}{e^2}=\frac{\cos^2\Theta+k.\sin^2\Theta}{k}=\frac{(k-1).\sin^2\Theta+1}{k}$.

[١٥] انظر:
J.P. Hogendijk, *Ibn al-Haytham's Completion of the Conics*, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences 7 (New York / Berlin / Heidelberg / Tokyo, 1985),
ص. ٣٨٣، مع مناقشة مستندة إلى دليل يستخدم التزايدية والاتصال.



الشكل ١٣-٢٢



الشكل ١٣-٢٣

ولكنَّ $HQ^2 = \frac{e^2}{g^2} \cdot \frac{ad}{4}$ وَ $HC^2 = \frac{ad}{4}$، فنستنتج أنَّ $\frac{AD}{BD} = \frac{e}{g}$.

ونستخدم، في حالة القطع الزائد، القضية ٢٣من المقالة الثالثة من كتاب "المخروطات"؛ فيكون معنا وفقاً لهذه القضية $\frac{D'A'^2}{BD'^2} = \frac{HQ^2}{HC^2} = \frac{e^2}{g^2}$ ، فنحصل على $\frac{A'D'}{BD'} = \frac{e}{g}$. ويكون معنا، من جهة أخرى، $\frac{A'D'}{BD'} = \frac{AD}{BD}$، بفضل التشابه بين المثلّثات $OA'D'$، OAD وَ OPB وبفضل الخاصَّة، الواردة في القضية ٣٦ من المقالة الأولى من كتاب"المخروطات"، التي تـُعطي المعادلة $\frac{AP}{A'P} = \frac{AO}{A'O}$.

إنَّ عدد الحلول يتعلّق بعدد نقاط التقاطع بين الدائرة والقطع الناقص (أو بين القطع الزائد المُرفق). وإذا رمزنا بـِ α وَ β إلى محوري القطع المخروطي، ليس للمسألة أيّ حلّ إذا كان القطر $\frac{e}{g}.\sqrt{ad}$ أصغر حصراً من β. وكذلك لا يوجد أيّ حلّ، في حالة القطع الناقص، إذا كان $\alpha < \frac{e}{g}.\sqrt{ad}$، في حين إنـــَّه يوجَد حلان عندما يكون $\beta < \frac{e}{g}.\sqrt{ad} < \alpha$. ويتطابق الحلان كلّما استـــُبدِلت إحدى المتباينات بمعادلة.

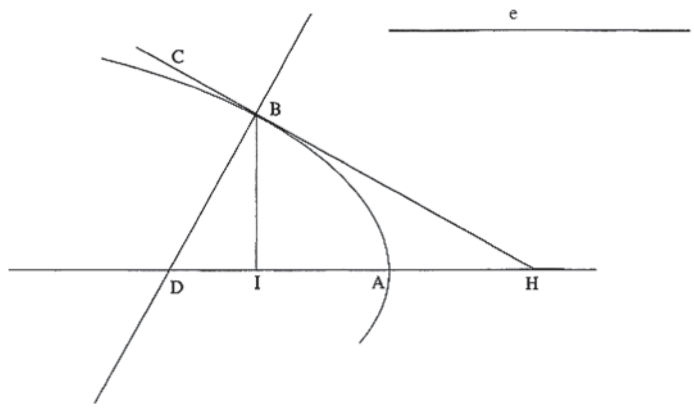
إنَّ مناقشة وجود حلول المسألة وعدد هذه الحلول، بواسطة الوسائل الهندسية، يتطلّب الدخول في اعتبارات دقيقة تخصُّ تحدُّب القطع المخروطيّ؛ ويبدو القيامُ بمثل هذه المناقشة صعباً جدّاً بدون استخدام مسائل تحليلية مثل تزايدية نصف قطر الدائرة المساعدة المُعتَبرِ كدالّة للنسبة المعلومة.

يمكننا أن نتساءل لماذا لم يُفكـــِّر ابن الهيثم بمثل هذا الحلّ البسيط، مع العلم أنـــَّه كان مطّلِعاً أكثر من أيّ شخص آخر،على كتاب "المخروطات" لأبلونيوس. ويجب أن نـــُذكـــِّر، في محاولتنا للجواب عن هذا السؤال، بأنَّ ابن الهيثم من جهة أخرى لم يعالِج مسائل المجسَّمات فحسب بل المسائل المستوية (انظر "المعلومات") بواسطة تقاطع القطوع المخروطية. وإنَّ اهتمامه، في المؤلّف الحالي، لم يكن منصبّاً على البحث عن أبسط طريقة لحلّ مسألة خاصَّة ما، بل على البحث عن فصائل من المخروطات تمكـــِّنه من حلّ تلك المسألة.

ولقد رأينا من جهة أخرى كيف استبدل ابن الهيثم، خلال معالجته للمثال الحالي، قطعين مخروطيين بقطعين مخروطيين آخرين من الفصيلة نفسها. ولا ننسَ أنَّ ابن الهيثم لم يكن يكتب، بشكل عامّ، ليتكلّم على موضوع معروف، بل ليقدِّم نتائج متقدِّمة مهمَّة في الرياضيات.

١٤– ليكن معنا قطع مكافئ ذو الرأس A والمحور AD؛ وليكن معنا الطول المعلوم e. المطلوب هو إيجاد النقطة B على القطع المكافئ بحيث يقطع خطُّ التماسّ في النقطة B الخطَّ AD على النقطة H مع $e = BH$.

التحليل: لنفرض أنَّ النقطة B والخطَّ BH معلومان. لنـــُخرِج IB بحيث يكون $IB \perp DA$ وَ $BH \perp BD$. يكون معنا $IH . HD = BH^2 = e^2$ (المثلّث قائم الزاوية).



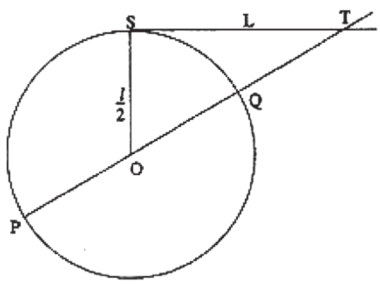
الشكل ١٤

نحن نعلم أنَّ A هي وسط IH، وفقاً لخاصيَّة مسقط خطّ التماسّ على المحور، وأنَّ $ID = \frac{a}{2}$، وفقاً لخاصيَّة المسقط على المحور للخطّ العمودي على خطّ التماسّ، حيث ترمز a إلى الضلع القائم. نستنتج من ذلك الطولين IH وَ ID بطريقة معروفة[١٦]. يكون IH إذاً معلوماً، فيكون الطول IAD معلوماً أيضاً. فنستخرج من ذلك النقطة I.

ملاحظة: ليكن معنا قطع مكافئ Γ ذو رأس A ومحور AD وليكن معنا الطول e. ولنـــُخرِج خطّاً مماسّاً للقطع Γ في النقطة B قاطعاً المحور على النقطة H بحيث يكون $BH = e$.

يُبرهن ابن الهيثم في التحليل أنَّ المعطيات تسمح بتحديد النقطة H. أما في التركيب فهو ينطلق من e ومن ضلع Γ القائم ويقول إنَّ H معلومة ويُضيف ببساطة "لنخرج من النقطة ح خطّاً مماسّاً للقطع، وليكن ح ب"[١٧].

[١٦] يتعلق الأمر بتحديد طولين x وَ y، علماً بأنَّ $x\text{-}y = l$ وَ $x.y = l.L$ ، حيث يكون l وَ L طولين معلومين. نرسم دائرة (O, r)، مع $r = \frac{l}{2}$ ونـُخرِج خطّ التماس TS ذا الطول L ؛ والخط OT يقطع الدائرة على النقطتين P وَ Q، فيكون معنا $x = TP$ وَ $y = TQ$. وهذا العمل ممكن دائماً.



[١٧] انظر ص٢٣١.

وهو لا يُعطي أيَّة إشارة لطريقة العمل الهندسي للنقطة H أو للنقطة B. ويتمّ هنا تحديد هاتين النقطتين بواسطة المسطرة والبركار، بطريقة بسيطة.

ويكفي لتحديد النقطة H أن نعرف مقدار HA؛ ولكنَّ $AH = \frac{HI}{2}$ فيكون معنا:

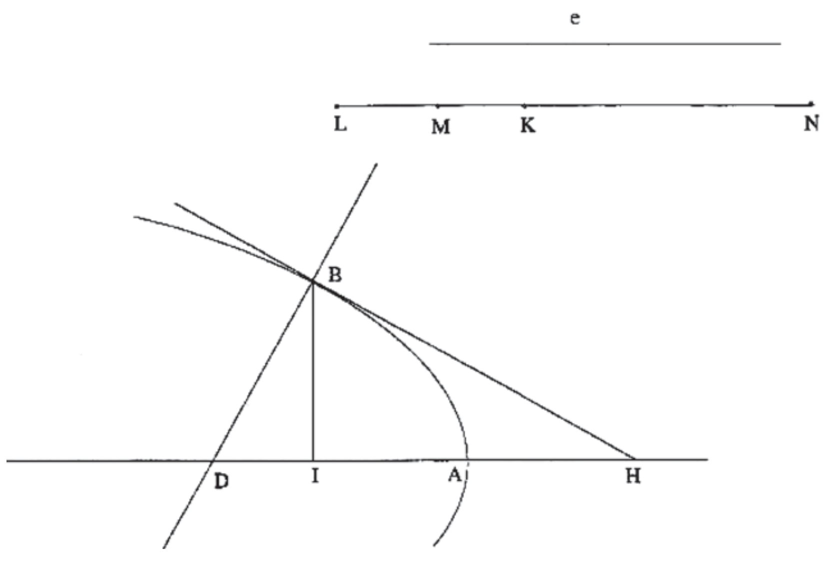
$e^2 = HD.\ HI$ ، $HD - HI = \frac{a}{2}$ = نصف الضلع القائم = l.

ونستخرج النقطة I، بعد تحديد النقطة H، لأنَّ $AH = AI$، فنحصل على النقطة I لأنَّ ID تساوي l، أي نصف الضلع القائم.

وتكون النقطة B المطلوبة نقطة تقاطع الدائرة ذات القطر HD مع الخطّ العمودي Δ في النقطة I على محور Γ.

وكان ابن الهيثم يعلم أنَّ تحديد النقطة H يسمح بإيجاد خطّ التماسّ (القضية ٤٩ من المقالة الثانية).

١٥- التركيب: يُبيِّن التركيب أنَّ إعطاء الطول والضلع القائم a يسمح بتحديد الطول HI وباستنتاج النقطة H ثمَّ النقطتين I وَ B. ويتمُّ الاستدلال بعد ذلك وفقاً لعكس الترتيب الذي اتُّبِع في التحليل.



الشكل ١٥

ملاحظة: النقطة B هي النقطة ذات الإحداثية الأولى IA، فتكون إذاً نقطة التقاطع بين القطع المكافئ والخطّ Δ العمودي في النقطة I على المحور؛ والنقطة B هي أيضاً نقطة تقاطع Δ مع الدائرة ذات القطر DH، حيث تــحُدَّد النقطتان H وَ D استناداً إلى المعطيات.

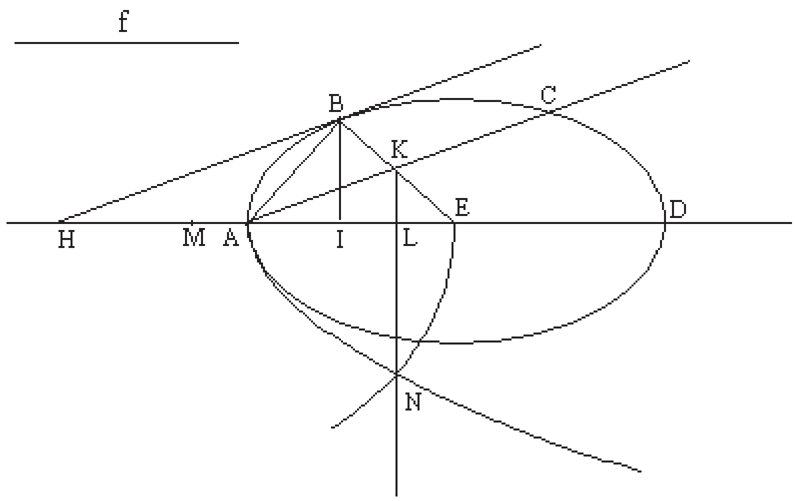
ولنلاحظ أخيراً أنَّ الأمر يتعلّق، هنا، بمسألة إدخال خطٍّ ذي طول معلوم e بين القطع المكافئ ومحوره؛ والشرط هو أن يكون الخطّ المُدخَل مماسّاً للقطع المكافئ.

١٦- ليكن معنا قطع مخروطيّ Γ ناقص أو زائد ذو محور DA ومركز E، وليكن معنا خطّ طوله f. المطلوب هو إيجاد نقطة B على Γ بحيث يقطع خطّ التماسّ في B المحورَ على نقطة H بحيث يكون $HB = f$.

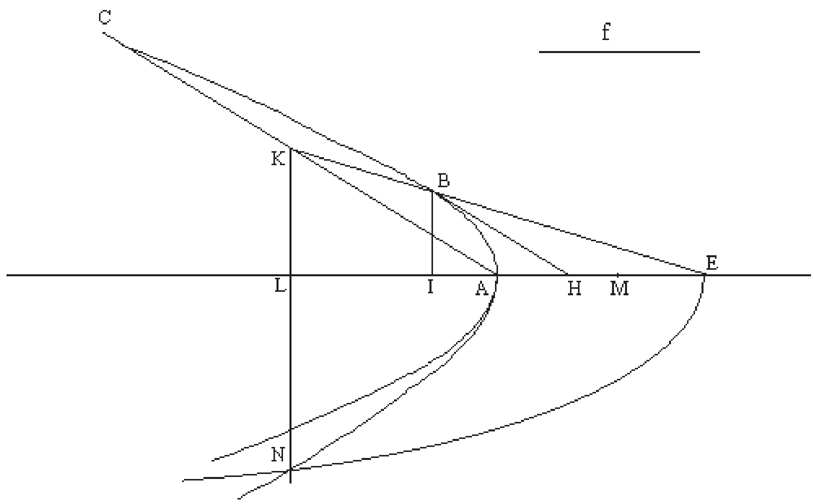
التحليل: ليكن HB خطّ التماسّ المطلوب؛ لنخرج IB وَ AC بحيث يكون $AD \perp IB$ وَ $BH // AC$. وليكن a الضلع القائم، فنحدِّد النقطة M بالمعادلة $\frac{ME}{MA} = \frac{DA}{a}$، فيكون MA مساوٍ لنصف "الخطّ الشبيه النسبة". (انظر أبلونيوس المقالة السابعة، القضيتين ٢ وَ ٣، وَ ص. ٧٥، الحاشية ٢).

يكون معنا إذاً: $\frac{ML.LA}{AK^2} = \frac{ME}{AE}$، ومن جهة أخرى $\frac{HE}{AE} = \frac{HB}{AK}$،

فنحصل على الجدِاء المعلوم: $HB.AE = HE.AK$.



الشكل ١٦-١



الشكل ١٦-٢

ولكنَّ القسمة $(A,\ D,\ I,\ H)$ توافقية، وفقاً لخاصَّة خطّ التماسّ؛ يكون معنا $EI.EH = AE^2$، فيكون بالتالي: $k = \frac{f}{AE} = \frac{BH}{AE} = \frac{AK}{IE} = \frac{AE.BH}{AE^2} = \frac{AK.HE}{EI.EH}$، فتكون هذه النسبة معلومة. فنستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{ML.LA}{IE^2} = \frac{ML.LA}{AK^2}.\frac{AK^2}{IE^2} = k^2.\frac{ME}{AE}$.

ولكنـــنَّا قد رأينا (القضية ٣) أنَّ $EI.EH = AE^2$، فيكون إذاً: $\frac{ML.LA}{LE.EA} = k^2.\frac{ME}{AE}$.

ليكن $\mathcal{P}$ القطعَ المكافئ ذا الرأس E والمحور LE والضلع القائم AE؛ يقطع $\mathcal{P}$ الخطّ LK على النقطة N. ليكن $\mathcal{H}$ القطعَ الزائد ذا الرأس A والمحور MA والضلع القائم a'، بحيث يكون: $\frac{MA}{a'} = \frac{ME}{AE}\frac{HB^2}{EA^2} = k^2.\frac{ME}{AE}$؛ فيقطع $\mathcal{H}$ الخطَّ LK على النقطة N'.

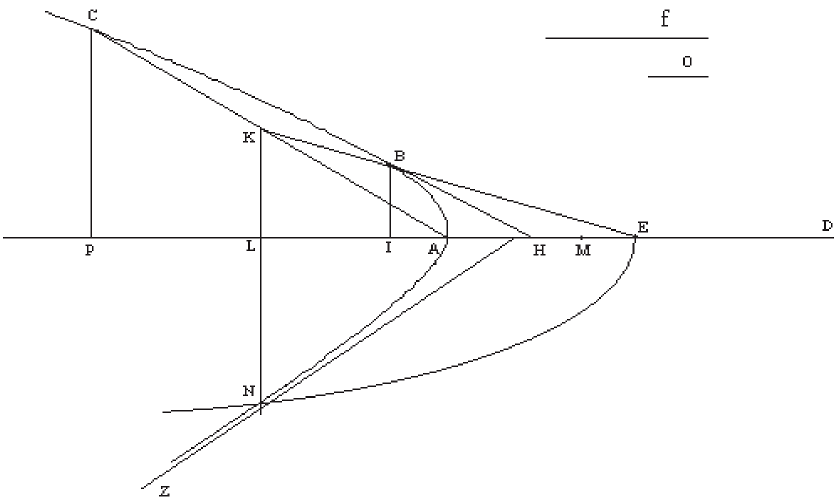
يكون معنا $N \in \mathcal{P}$، فيكون إذاً: $EL.EA = LN^2$؛ $N' \in \mathcal{H}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{LM.LA}{LN'^2} = \frac{MA}{a'} = k^2.\frac{ME}{AE}$؛ فنستنتج من (١) أنَّ: $EL.EA = LN'^2$، ويكون إذاً $LN'^2 = LN^2$؛ فتكون النقطتان N وَ N' متطابقتين.

فإذا كان خطّ التماسّ BH موجوداً، يكون للقطع الزائد $\mathcal{H}$ وللقطع المكافئ $\mathcal{P}$ نقطة مشتركة هي N.

يتلاقى القطعان المخروطيان $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ في النقطة N الموجودة على الخطّ العمودي على المحور في النقطة L، ولكنَّ N لا تقع على القطع المعلوم Γ. وهذا ما يقود ابن الهيثم إلى تحرير غير مألوف نوعاً ما، لأنَّ هذا التحرير قد يعطي الانطباع بأنَّ النصَّ يُشبه نصَّ تركيب. ليس من المفيد أن نقارن بين هذا النصَّ ونصّ عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع، حيث نلاحظ نوعاً من الغموض بين التحليل والتركيب[١٨].

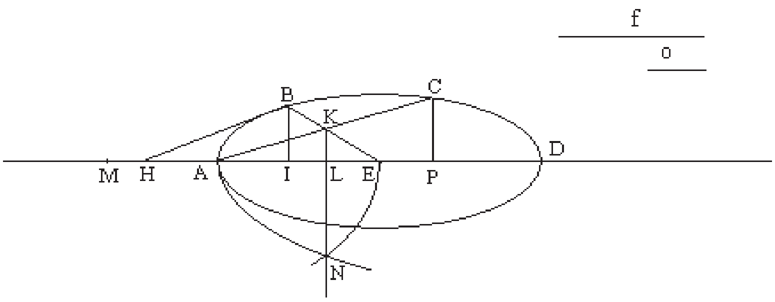
١٧– **التركيب:** نحدِّد النقطة M، مثلما فعلنا في التحليل، بالمعادلة $\frac{ME}{MA}=\frac{DA}{a}$. ليكن o طولَ خطّ بحيث يكون $\frac{MA}{o}=\frac{f^2}{EA^2}\frac{EM}{EA}$؛ وليكن $\mathcal{H}$ القطعَ الزائد ذا المحور المستعرض (السهم المُجانِب، كما يقول ابن الهيثم) AM والضلع القائم o ؛ وليكن $\mathcal{P}$ القطعَ الناقص ذا السهم EA والضلع القائم EA. يتلاقى القطعان المخروطيّان $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ في النقطة N (انظر المناقشة ص. ١٤٥).

لتكن L وَ P النقطتين المحدَّدتين بـ $NL \perp AD$ وَ $LP = AL$. توجَد النقطتان L وَ P داخل القطع الناقص أو الزائد Γ. ولتكن C نقطة على Γ بحيث تكون النقطة P مسقطَها على المحور. يتقاطع الخطّان AC وَ NL على النقطة K، والخطّ EK يقطع Γعلى النقطة B. وخطّ التماسّ في B يقطع المحور على النقطة H؛ لنبيِّن أنَّ $f = HB$.



الشكل ١٧ـ١

[١٨] انظر ص. ٤٨٨.



الشكل ١٧-٢

ليكن BI مع $BI \perp AD$ ، فيكون معنا $EL.EA = EI^2$ (انظر التحليل).

ويكون من جهة أخرى $N \ni \mathcal{P}$، فيكون $EL.EA = LN^2$ ، ويكون معنا إذاً $EI \perp LN$. ولكنَّ $N \ni \mathcal{H}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{LM.LA}{LN^2} = \frac{MA}{o} = \frac{ME}{EA}.\frac{f^2}{EA^2} = \frac{LM.LA}{EI^2}$ ؛ ولكننا نعلم أنَّ: $\frac{LM.LA}{AK^2} = \frac{ME}{EA}$ ، فيكون معنا: $\frac{AK.EH}{EI.EH} = \frac{f}{EA}$ ، ويكون: $BH.EA = AK.EH$ ، ومن جهة أخرى $EI.EH = EA^2$ ، فيكون معنا: $\frac{BH}{EA} = \frac{f}{EA}$ ، فنحصل على $f \perp BH$.

مناقشة وجود N

إذا كان Γ قطعاً ناقصاً، تكون النقطة E التي هي رأس $\mathcal{P}$، داخل $\mathcal{H}$ (فرع القطع الزائد المعنيّ بالأمر)؛ ويكون للقطعين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ المحور نفسُه وتقعُّران متضادّان؛ وهما يتقاطعان على نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى المحور AD.

وإذا كان Γ قطعاً زائداً، يكون وسط MA، الذي هو النقطة H، داخل $\mathcal{P}$؛ فيقطع $\mathcal{P}$ إذاً خطّا $\mathcal{H}$ المقارَبين، فيقطع بالتالي $\mathcal{H}$.

ملاحظتان

١) يتعلّق الأمر باستخدام تقنية النيوسِس، كما حصل في المسألة السابقة الخاصَّة بالقطع المكافئ، ولكنَّ هذا الاستخدام يخصُّ هذه المرة القطوع المخروطية التي لها مركز.

٢) لِنَصُغ المسألة بواسطة المعادلات. تكتَب معادلة Γ على الشكل التالي: $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = x^2 + k.y^2$ ،

حيث يكون d قطر Γ، ويكون $k > 0$ إذا كان Γ قطعاً ناقصاً، ويكون $k < 0$ إذا كان Γ قطعاً زائداً. ويكون معنا دائماً $k(k-1) > 0$، لأنَّ k ليست بين 0 وَ 1.

يُساوي ظلُّ زاوية الانحدار، لخطّ التماسّ على Γ في النقطة B ذات الإحداثيتين (x, y)، $\frac{-x}{k.y}$، فنحصل على معادلة خطّ التماسّ: $\frac{-x}{k.y}(X-x)=Y-y$. يكون معنا إذاً:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2-k.y^2}\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2-k.y^2+k^2.y^2\right)=\frac{y^2}{x^2}\left(x^2+k^2.y^2\right)=\frac{k.y^4}{x^2}+y^2=BH^2.$$

وهكذا تكون معنا المعادلة: $f^2.\left(1-\frac{4k.y^2}{d^2}\right)=y^2.\left[1+k(k-1).\frac{4y^2}{d^2}\right]$،

التي تُصبح، إذا وضعنا $\frac{2y^2}{d}=\eta$، $f^2=k(k-1).\eta^2+\left(\frac{d}{2}+\frac{2k.f^2}{d}\right)\eta$.

وهكذا نبدأ، للحصول على حلّ المسألة، بتطبيق المساحة $\frac{f^2}{k(k-1)}$، التي نُنقِص منها المربَّع η^2، على طول الخطّ $\frac{1}{k(k-1)}\left(\frac{d}{2}+\frac{2k.f^2}{d}\right)$. ثمَّ نجد y كضلع المربَّع المعادل للمساحة $\frac{d}{2}.\eta$.

وهكذا نرى أنَّ المسألة، هنا أيضاً، هي مسألة مستوية. ولكنَّـنا لا يمكن أن نكتشف ذلك بواسطة تحليل هندسيّ محض، لأنَّ الأمر يتعلّق بمعادلة مزدوجة التربيع. لقد استخدم ابن الهيثم على كل حال، هنا أيضاً، تقاطعاً بين قطعين مخروطيين، ولم يستخدم رسماً مستوياً.

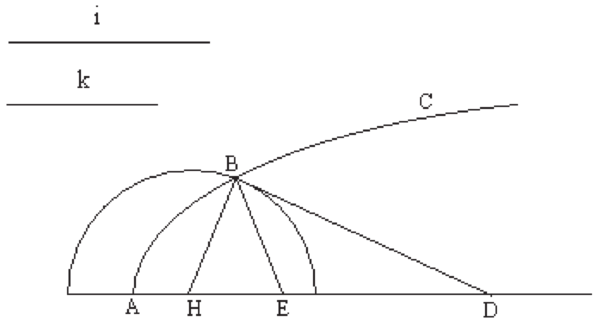
-١٨- ليكن معنا قطع مخروطيّ Γ ذو رأس A ولتكن D وَ E نقطتين على محوره. المطلوب هو إيجاد نقطة B على Γ بحيث يكون $\frac{i}{k}=\frac{BD}{BE}$ (حيث تكون النسبة $\frac{i}{k}$ معلومة)[١٩].

التحليل: إذا وُجدت نقطة B تحقِّق شروط المسألة، تكون هذه النقطة في آن واحد على Γ وعلى الدائرة التي هي مجموع النقاط التي تكون نسبة مسافاتها إلى D وَ E مساوية للنسبة $\frac{i}{k}$؛ ويقسم طرفا قطرِ هذه الدائرة، الموجودِ على الخطّ DE، الخطَّ DE توافقياً.

يُحدِّد ابن الهيثم مركز الدائرة H ونصف قطرها بالطريقة التالية:

[١٩] لا يوضِّح ابن الهيثم نوع القطع المخروطيّ Γ. التحليل صالح للقطع الناقص والزائد والمكافئ، ولكنَّ ابن الهيثم لا يُشير إلا إلى رأس واحد. أما في التركيب، فإنَّه من الواضح أنَّ ابن الهيثم منذ بدء المناقشة لا يتناول القطع الناقص الذي تكون مناقشته مختلفة جداً (انظر الحاشية التالية).

ليكن H بحيث تتحقــق المعادلة $\widehat{HBD} = \widehat{HEB}$. ونستخلص بفضل التشابه بين المثلّثين EBH وَ HDB: $\frac{DH}{HB} = \frac{BH}{HE} = \frac{BD}{BE}$، فيكون $\frac{HD}{HE} = \frac{i^2}{k^2}$؛ وتكون النقطة H معلومة ويكون الطولان HD وَ HE معلومين. ويكون، من جهة أخرى، $HD.HE = HB^2$، فيكون الطول HB معلوماً وتكون B على دائرة مركزها H ونصف قطرها المعلوم $HB = r$ ؛ والنقطة B، إذا وُجدت، تكون نقطة تقاطع الدائرة (H, r) مع Γ.



الشكل ١٨-١

إذا كان $\frac{i}{k} = 1$، يكون معنا $EB = BD$؛ وإذا وجِدت النقطة B، تكون على المُنصِّف العمودي Δ للخطّ ED، تكون B نقطة تقاطع Γ مع Δ.

ولا يتناول ابن الهيثم الفرضية $\frac{i}{k} = 1$ إلا خلال المناقشة.

ملاحظة:

إذا كان $\frac{i}{k} \neq 1$، تكون النقطة H خارج القطعة DE.

إذا كان $i < k$، تكون H أبعد من E ويكون $BD > BE$ (تُسمَّى BD القطعة الأولى).

إذا كان $i > k$، تكون H أبعد من D ويكون $BD < BE$.

يتبنَّى ابن الهيثم الفرضية $i < k$، وهذا ما يجعل النقطة H خارج القطعة DE من جهة E (وهذا ما يؤكِّده النصُّ وما تؤكِّده الأشكال في المخطوطة[٢٠]).

---

[٢٠] إذا افترضنا أنَّ $i \neq k$، لنبيِّن أنـّه يمكن أن نقصر الدراسة على الحالة $\frac{i}{k} < 1$، أي على الحالة $i < k$، بدون أن نُقلل من عمومية المسألة.

ليكن معنا العدد $\lambda > 1$، وليكن معنا موضع معلوم لكلّ من النقطتين D وَ E على yx، محور Γ؛ ولنأخذ الشكل ١٨-٢ المُرفَق بالنسبة $\frac{BD}{BE} = \lambda$ والشكل ١٨-٣ المرفق بالنسبة $\frac{BD}{BE} = \frac{1}{\lambda} < 1$.

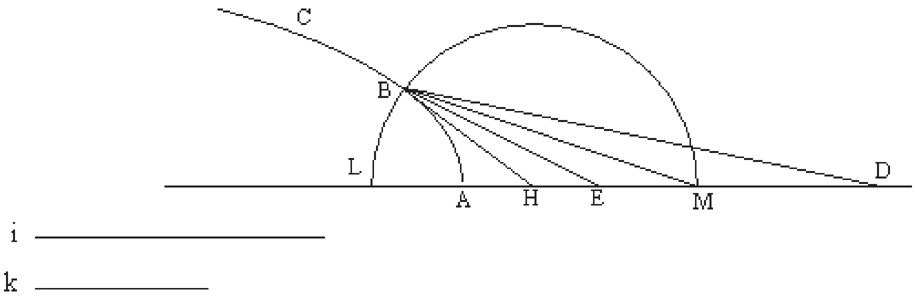
يُمكن إذاً، إذا افترضنا أنَّ $\lambda = \frac{i}{k} < 1$، أن نحصل على كلّ حالات الشكل التي يجب تفحُّصها خلال مناقشة المسألة.

ولنلاحظ أنَّ ابن الهيثم يفترض منذ بداية هذه المناقشة أنَّ $i < k$ وأنـّه، في أغلب الحالات وبعد أن يدرس الشكل الذي توجد فيه النقاط A، D وَ E في ترتيب معيَّن، يتفحَّص الشكل الحاصل من تبديل النقطتين D وَ E. (انظر الملاحظة ٣-٢ ص. ١٥١، والملاحظة ص. ١٥٣).

١٩- التركيب: نتناول من جديد Γ والنقطتين D وَ E. لتكن H النقطة المحدَّدة بالمعادلة $\frac{HD}{DE}=\frac{i^2}{k^2}$، ولتكن HM المسافة المحدَّدة بالمعادلة $HD.HE=HM^2$. لنبيِّن أنَّ $\frac{DB}{DE}=\frac{i}{k}$، إذا كانت الدائرة (H, HM) تقطع Γ على النقطة B (انظر المناقشة).

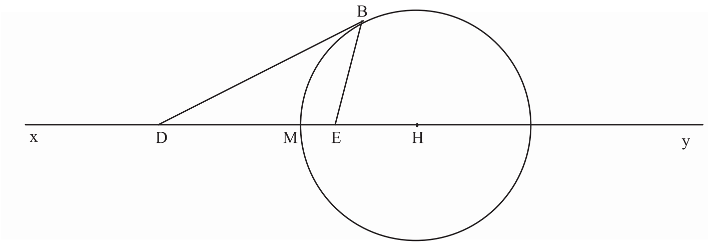
يكون معنا $HB=HM$، فيكون إذاً $HD.HE=HB^2$، فنحصل على $\frac{HD}{HB}=\frac{HB}{HE}$؛ والمثلّثان DBH وَ HBE اللذان لهما الزاوية المشتركة $\widehat{H}$ متشابهان. يكون معنا إذاً:

$$\frac{DB^2}{BE^2}=\frac{HD^2}{HB^2}=\frac{HD}{DE}=\frac{i^2}{k^2}$$ ، فنحصل على $\frac{DB}{DE}=\frac{i}{k}$.

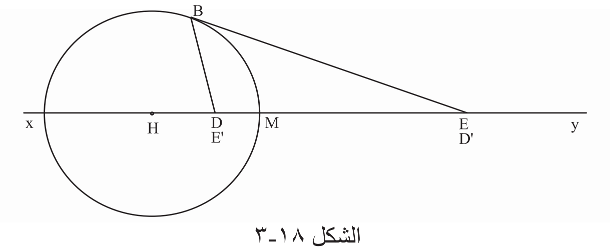


الشكل ١٩-١

ملاحظة: نستخرج من المعادلتين $\frac{HD}{DE}=\frac{i^2}{k^2}$ وَ $HD.HE=HM^2$: $\frac{i^2}{k^2}=\frac{HD^2}{HE.HD}=\frac{HD^2}{HM^2}$،



الشكل ١٨-٢



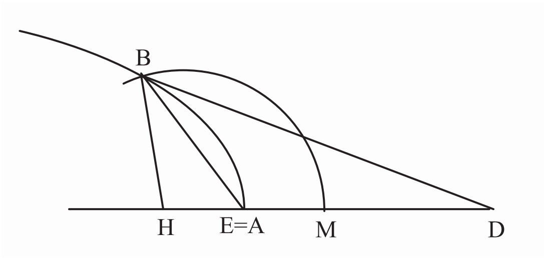
الشكل ١٨-٣

نحصل على الشكل ١٨-٣ من الشكل ١٨-٢ بواسطة تناظر ما؛ فإذا استبدلنا، في الشكل ١٨-٣، (D,E) بـ (D',E')، نحصل على الشكل الخاصّ بالحالة $\lambda=\frac{BD}{BE}>1$.

فيكون: $\frac{HD}{HM} = \frac{HM}{HE} = \frac{i}{k}$.

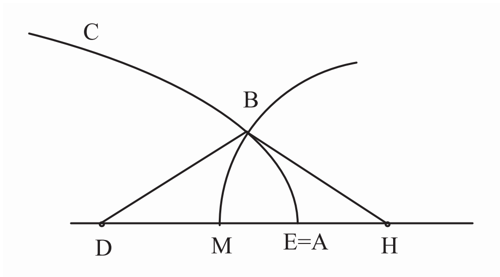
المناقشة: لنفرض أنَّ $i < k$ $(HB < BE)$.

١) إذا كانت E في A (رأس Γ) وكانت D خارج Γ، تكون H داخل Γ وتكون M، التي هي بين E وَ D ، خارج Γ(انظر الشكل ١٩-٢)؛ والدائرة (H, HM) تقطع Γ.[٢١]



الشكل ١٩-٢

٢) إذا كانت E في A (رأس Γ) وكانت D داخل Γ، تكون H خارج Γ وتكون M داخل Γ (انظر الشكل ١٩-٣)؛ والدائرة (H, HM) تقطع Γ.



الشكل ١٩-٣

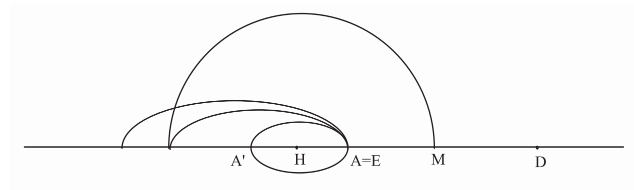
[٢١] إنَّه من الواضح أنَّ ابن الهيثم يفترض هنا أنَّ Γ قطع مكافئ أو قطع زائد، أي أنَّ Γ قطع مخروطي ذو فرع غير منتهٍ، كما يفترض أنَّ الدائرة (H, HM) تقطع ΓM بالضرورة.

ولكن إذا كان Γ قطعاً ناقصاً ذا محور AA' ، يكون لدينا ثلاث إمكانيات:

١) Γ داخل الدائرة (H, HM)

٢) Γ مماسّ للدائرة (H, HM)

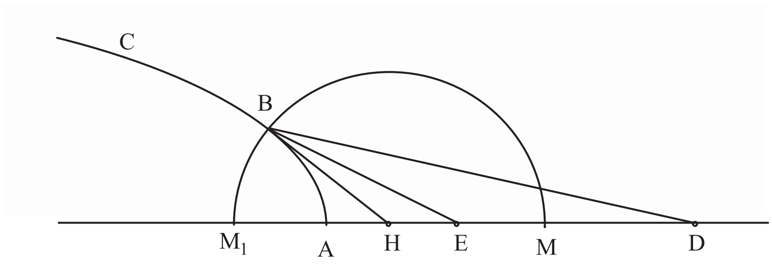
٣) Γ يقطع الدائرة (H, HM)



وقد تتطلّب المناقشة شروطاً إضافية تأخذ بعين الاعتبار موضع A' الرأس الثاني للقطع الناقص.

ونحن نجد ثانية صعوبات من نوع مماثل خلال المناقشة في الحالات ٣، ٤ وَ ٥.

٣-١) إذا كانت E وَ D خارج Γ، يُمكن أن تكون النقطة H، المحدَّدة بالمعادلة $\frac{DB}{DE}=\frac{i}{k}$، داخل Γ أو على Γ أو خارج Γ؛ وتكون M دائماً بين E وَ D.



الشكل ١٩-٤

إذا كانت H داخل Γ أو في النقطة A على Γ، تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ.

إذا كانت H خارج Γ وبين النقطتين A وَ E (انظر الشكل ١٩-٤)، تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ إذا، وفقط إذا، تحقَّقت المتباينة $HA < HM$.

ولكنَّ $HA < HM \Leftrightarrow \frac{DH}{HA} < \frac{DH}{HM} \Leftrightarrow \frac{DH}{HA} < \frac{i}{k}$.

الشرط $\frac{ED}{EA} \leq \frac{i}{k}$ الذي أعطاه ابن الهيثم هو شرط كافٍ لأنَّ $\frac{DH}{HA} < \frac{ED}{EA}$، ولكنَّه ليس ضرورياً.

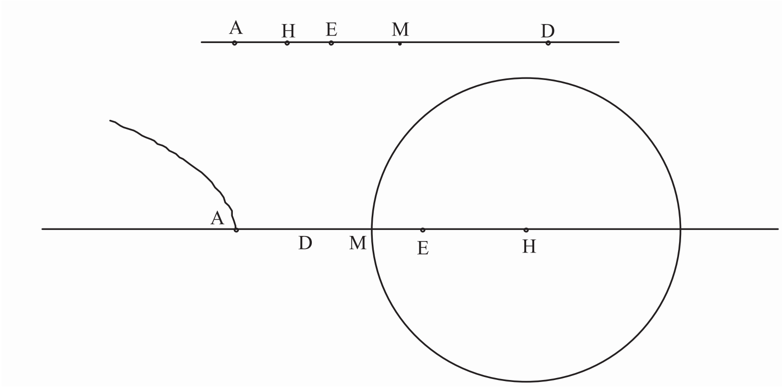
وإذا كان $HM = HM_1$ مع $M_1 \in (H, HM)$، يُصبح شرط التقاطع:

$HA < HM_1 \Leftrightarrow EA < EM_1$؛ ولكنَّ $\frac{i}{k}=\frac{M_1D}{M_1E}$، فيكون: $\frac{DE}{M_1E}=\frac{i-k}{k}$ وَ $M_1E=\frac{k.DE}{i-k}$.

يكون معنا إذاً: $EA < EM_1 \Leftrightarrow \frac{k.DE}{i-k} > EA \Leftrightarrow \frac{i-k}{k} > \frac{DE}{EA} \Leftrightarrow \frac{i}{k} > \frac{DA}{EA}$؛

وهذا هو الشرط الضروري والكافي لوجود حلّ عندما تكون النقطتان D وَ E خارج Γ، مع تتابع النقاط وفقاً للترتيب A، E وَ D.

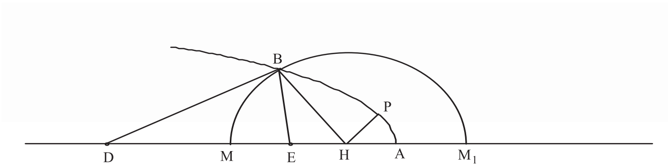
٣-٢) تبدأ الفقرة التالية في نص ابن الهيثم كما يلي: "فإن كان مقدم النسبة يلي نقطة هـ وهو الأعظم،..."[٢٢]؛ واضح إذاً أنَّ ابن الهيثم يُبقي على الفرضية $\frac{i}{k} > 1$، ولكنَّه يُبادل بين دوريْ E وَ D في الشكل ١٩-٤، فيكون معنا الشكل ١٩-٥ مع E و M خارج Γ.



الشكل ١٩-٥

يكون معنا إذاً: $HM < HA$ ، فلا تقطع الدائرة (H, HM) القطع Γ.

٤) إذا كانت E وَ D داخل Γ، مع تتابع النقاط وفق الترتيب A، E وَ D، يُمكن أن تكون النقطة H خارج Γ أو في A على Γ أو داخل Γ بين A وَ E.



الشكل ١٩-٦

إذا كانت النقطة H خارج Γ أو في A، فإنَّ الدائرة (H, HM) تقطع Γ.

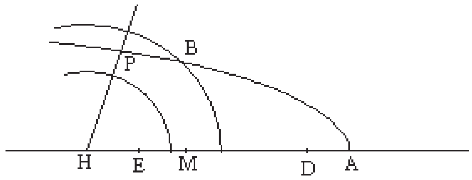
إذا كانت النقطة H بين A وَ E، وإذا كانت P النقطة على Γ بحيث تكون HP الحدَّ الأدنى لمسافات النقطة H إلى نقاط Γ، فإنَّ الشرط الضروريّ والكافي لكي تكون B موجودة هو $HP \leq HM$.

ويُمكن أن تكون المسألة بدون حلّ أو أن يكون لها حلّ أو حلان.

[٢٢] انظر ص. ٢٣٩

والشرطُ $\frac{DE}{EA} \leq \frac{i}{k}$، الذي يُعطيه ابن الهيثم والذي يؤدّي إلى المتباينة $HM > HA$ ، كافٍ ولكنّه غير ضروريّ.

ولنلاحظ أنَّ ابن الهيثم لا يدرس هذه المرّة الحالة التي تكون فيها النقطتان D وَ E داخل Γ مع تتابع النقاط حسب الترتيب A، D وَ E. تكون H، في هذه الحالة، أبعدَ من E (انظر الشكل ١٩-٧)، فتكون النقطتان H وَ M داخل Γ، ويكون $HM < HA$.

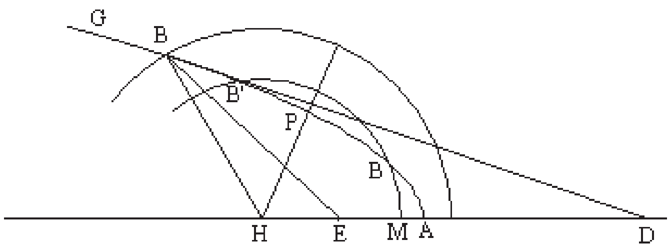


الشكل ١٩-٧

وإذا كانت HP المسافة الدنيا من نقاط Γ إلى النقطة H، فإنَّ الشرط الضروريّ والكافي لكي تكون B موجودة هو $HP \leq HM$.

٥) إذا كانت P خارج القطع وكانت E في داخله مع نفس الشرط $\frac{i}{k} > 1$، تكون النقطة H عندئذ في داخل القطع.

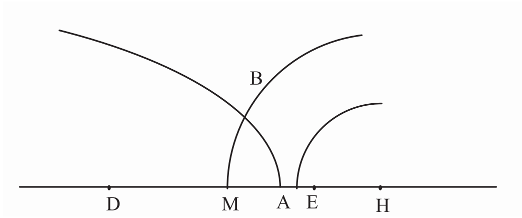
والشرط الكافي والضروريّ لكي تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ هو $HP \leq HM$ حيث تكون HP، كما في السابق، المسافة الدنيا من النقطة H إلى نقاط Γ.



الشكل ١٩-٨

إذا كانت D داخل القطع وكانت E في خارجه ، تكون النقطة H عندئذ خارج القطع؛ فيمكن أن تكون النقطة M داخل Γ أو في A على Γ أو خارج Γ.

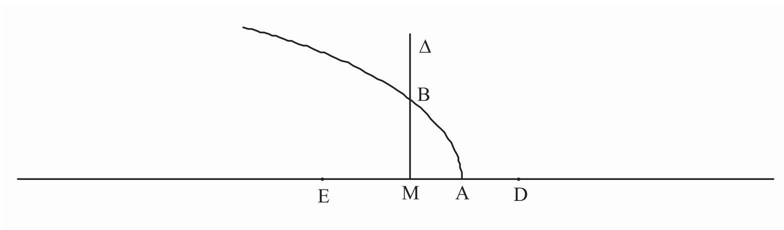
والشرط الكافي والضروريّ لكي تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ هو $HA < HM$ (انظر الشكل ١٩-٩).



الشكل ١٩-٩

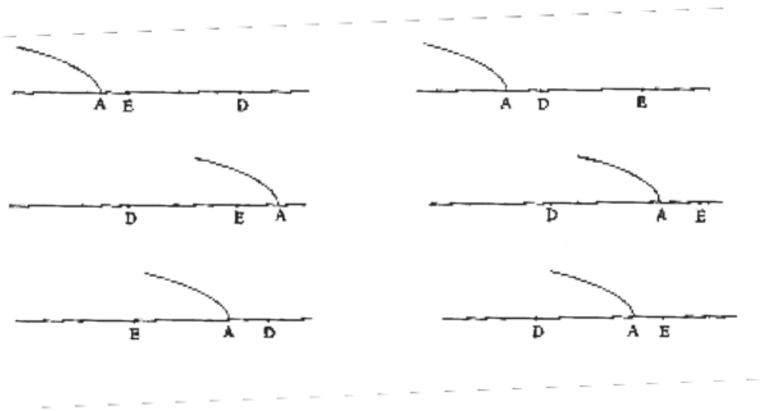
ويُصبح هذا الشرط، كما هي الحال في ٣) وَ ٤)، $\frac{DA}{EA} > \frac{i}{k}$.

٦) لقد رأينا أنَّ B تكون على Δ العمود المُنَصِّف للخطّ DE، عندما يكون $i = k$؛ ولكي يقطع Δ القطع Γ، يجب ويكفي أن تكون M، وهي وسط DE، في داخل Γ مهما كان ترتيب النقاط A ، D وَ E.



الشكل ١٩-١٠

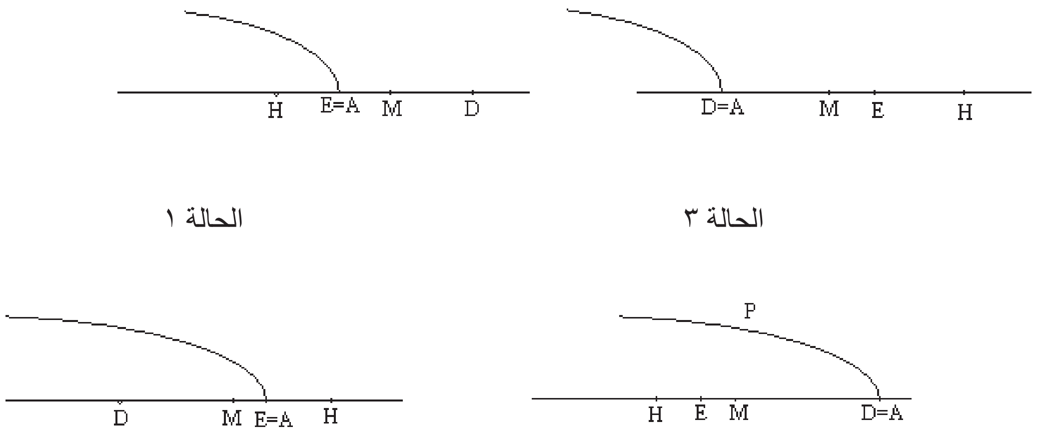
ملاحظة: لقد وجدنا، خلال هذه المناقشة، الترتيبات التالية للقطع Γ وللنقطتين D وَ E ، حيث نأخذ بعين الاعتبار التبديلات بين D وَ E:



الشكل ١٩-١١

لنلاحظ أنَّ ابن الهيثم لم يدرس الحالتين ٣ وَ ٤ المرفقتين بالحالتين ١ وَ ٢.

إنـَّه من الواضح أنَّ المسألة ليس لها حلّ في الحالة ٣، لأنَّ $HA > HM$.



الحالة ٣ — الحالة ١

الحالة ٤ — الحالة ٢

الشكل ١٩-١٢

إذا كانت HP المسافة الدنيا من النقطة H إلى نقاط Γ، فإنَّ شرط التقاطع بين Γ والدائرة (H, HM) هو $HP \leq HM$.

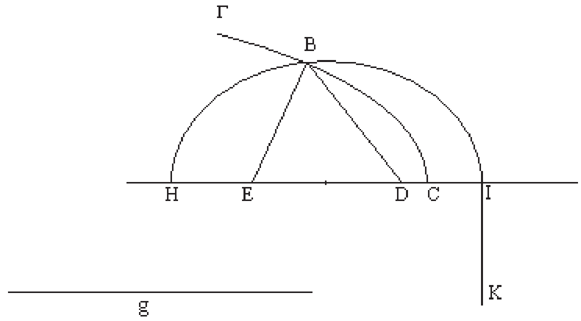
٢٠– ليكن Γ قطعاً مخروطيّاً ذا رأس C، ولتكن D وَ E نقطتين على محوره، وليكن g طولاً معلوماً. المطلوب هو إيجاد نقطة B على Γ بحيث يكون $g = BD + BE$؛ فيكون من الضروريّ أن نفترض $g < ED$.

ملاحظة: تـُحدِّد المعادلة $g = BD + BE$ قطعاً ناقصاً $\mathcal{E}$ بؤرتاه D وَ E. ترجع المسألة إذاً إلى دراسة التقاطع بين Γ وَ $\mathcal{E}$.

التحليل: لتكن I وَ H نقطتين على الخطّ ED خارج القطعة ED، بحيث يكون $HE = DI = \frac{g - DE}{2}$؛ فيكون معنا عندئذ $g = HI$.

نحدِّد IK بواسطة المعادلة: $HI.IK = 4.HD.DI$.

يُحدَّد إذاً القطعُ الناقص ε ذو المحور HI والضلع القائم KI استناداً إلى المعطيات، وهو، وفقاً لأبلونيوس (القضية ٥٢ من المقالة الثالثة)، يمرُّ بالنقطة B.



الشكل ٢٠

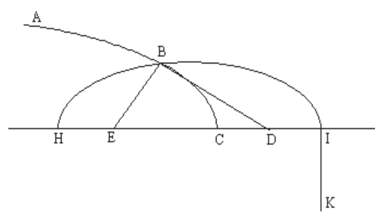
إنَّ دوريْ D وَ E، في كلّ هذه المسألة، قابلان للتبديل، لأنَّ العمود المنصِّف للقطعة DE هو محور التناظر للقطع الناقص.

٢١- **التركيب**: نرسم القطع الناقصε كما أشرنا إلى ذلك في التحليل؛ ومحوره HI يساوي g.

لنفرض أنَّ ε وَ Γ يتقاطعان على النقطة B. يكون معنا وفقاً لأبلونيوس (القضية ٥٢ من المقالة الثالثة): $B \in \varepsilon \Leftarrow g=BE+BD$، **فيكون** $g = BD + BE$. تـُحقـِّق النقطة B، إذاً، الشروطَ المطلوبة في المسألة.

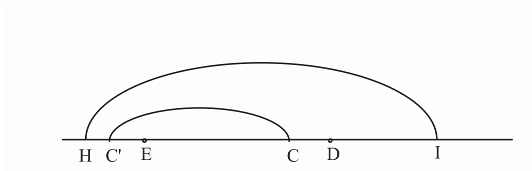
المناقشة: نفترض أنَّ $g > DE$.

١) إذا كانت إحدى النقطتين D أو E خارج Γ وكانت الأخرى داخله، أو إذا كانت إحدى هاتين النقطتين في C رأس Γ وكانت الأخرى داخل أو خارج ، يكون معنا بالضرورة $C \in [ED]$؛ فإذا كان Γ قطعاً مكافئاً أو زائداً، تكون إذاً إحدى النقطتين H وَ I داخل Γ وتكون الأخرى خارجه (انظر الشكل ٢١-١)، فيقطع Γ إذاً ε في نقطة ويكون للمسألة حلّ.



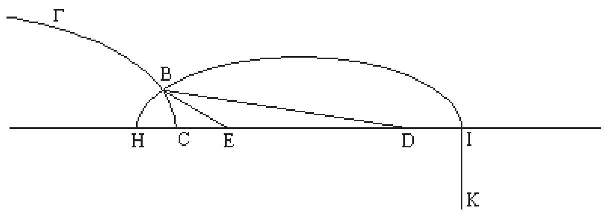
الشكل ٢١-١

ولكن، إذا كان Γ قطعاً ناقصاً، يمكن أن يكون رأسه الثاني C' بين H وَ E، فلا يمكن أن نحصل على نتيجة. وهكذا يبدو أنَّ ابن الهيثم يفترض أنَّ Γ قطع مكافئ أو زائد، كما فرض في المسألة السابقة.



الشكل ٢١-٢

٢) إذا كانت النقطتان D وَ E داخل Γ وفقاً للترتيب C، E، D ، نميِّز بين حالتين:



الشكل ٢١-٣

ا) إذا كان $\frac{g-DE}{2}>EC$، أي إذا كان $EH>EC$، تكون النقطة H عندئذ داخل Γ[٢٣] وتكون I خارجه، فيتقاطع $\mathcal{E}$ مع Γ على النقطة B.

ب) إذا كان $\frac{g-DE}{2}<EC$، تكون النقطتان H وَ I عندئذ خارج Γ، فيكون $\mathcal{E}$ بكامله خارج Γ، فلا يوجَد حلّ للمسألة.

لنلاحظ أنَّه إذا كان $\frac{g-DE}{2}=EC$، تكون النقطة H في C؛ والنقطة C تُحقِّق شروط المسألة لأنَّ $g=HI=CD+CE$.

٣) إذا كانت النقطتان D وَ E داخل Γ وفقاً للترتيب C، D، E، نميِّز بين ثلاث حالات:

[٢٣] يكون هذا الاستدلال صالحاً، إذا كان Γ قطعاً مكافئاً أو زائداً.

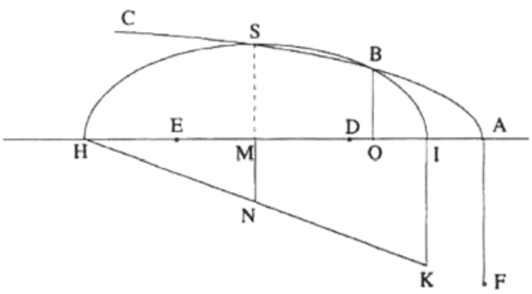
ا) إذا كان $\frac{g-DE}{2}>CD$ ، أي إذا كان $DI>DC$ ، تكون النقطة I عندئذ خارج Γ وتكون H داخله[٢٤]، فيتقاطع ε مع Γ.

ب) إذا كان $\frac{g-DE}{2}=DC$ ، يكون $C=I$ ، وتكون C حلاً للمسألة.

جـ) إذا كان $\frac{g-DE}{2}<CD$ ، تكون النقطة I عندئذ داخل Γ وتتطلب المسألة مناقشة أعظم من المناقشة الحالية؛ وهذا ما تتمُّ دراسته في القضية ٢٢ حيث يكون Γ قطعاً مكافئاً، وفي القضية ٢٣ حيث يكون Γ قطعاً زائداً.

٢٢- إذا كانت النقطتان D وَ E داخل Γ وإذا كان $\frac{g-DE}{2}<AD$ [٢٥]، يكون H وَ I، رأسا القطع الناقص ε داخل Γ.

لنفرض أنَّ Γ قطع مكافئ.



الشكل ٢٢-١

لتكن النقطة M مركز القطع الناقص ε ، وليكن IK ضلعه القائم؛ ولتكن النقطة A رأس القطع المكافئ وليكن FA ضلعه القائم. والشرط الذي أعطاه ابن الهيثم لكي يتقاطع ε وَ Γ هو: $\frac{HI}{KI}\leq\frac{HM^2}{MA.AF}$.

١) ليكن $\frac{HI}{KI}=\frac{HM^2}{MA.AF}$. (انظر الشكل ٢٢-١).

---

[٢٤] انظر الحاشية السابقة.

[٢٥] استُبدِل الحرف C في القضية ٢٢ بالحرف A.

ليكن MN بحيث يكون $MN \perp HI$، مع $N \in HK$، فيكون معنا بالتتابع:

$$\frac{HM^2}{MA.AF} = \frac{HI}{KI} = \frac{HM}{MN} = \frac{HM.MI}{MN.MI} = \frac{HM^2}{MN.MI}،$$

فنحصل على $MN.MI = MA.AF$.

نرفِق بالنقطة M نقطة على القطع المكافئ بحيث تكون y إحداثيتها الثانية ونرفق بالنقطة M نقطة على القطع الناقص بحيث تكون Y إحداثيتها الثانية؛ فيكون معنا:

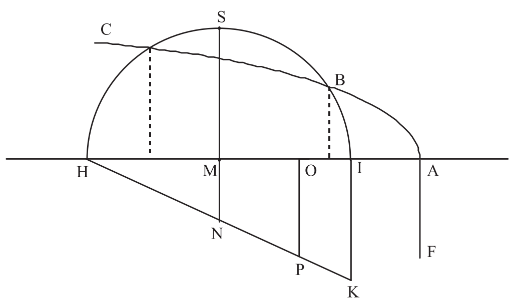
$$MA.AF = y^2 \quad (\text{معادلة } \Gamma) \quad \text{وَ} \quad \frac{MI.MH}{Y^2} = \frac{HI}{IK} \quad (\text{معادلة } \varepsilon)،$$

فيكون إذاً $\frac{MH^2}{Y^2} = \frac{MH}{MN}$، فنحصل على $MI.MN = MH.MN = Y^2$؛ يكون معنا إذاً: $y = Y$، فيمرّ Γ إذاً بالنقطة S رأس القطع الناقص ε.

٢) لنفرض أنّ $\frac{HM^2}{MA.AF} < \frac{HI}{KI}$.

يكون معنا، لكلِّ نقطة O على القطعة IH، $0 < HO.OI < HM^2$، فتوجَد O بين I و M بحيث يكون:

(١) $\frac{HO.OI}{MA.FA} = \frac{HI}{KI}$ (الشكل ٢٢-٢) .



الشكل ٢٢-٢

ليكن OP بحيث يكون $OP \perp IH$ وتكون P على HK، فيكون معنا:

$$\frac{HI}{KI} = \frac{HO}{OP} = \frac{HO.OI}{OP.OI}. \qquad (٢)$$

نستخرج من (١) وَ (٢) : $OP.OI = MA.FA$. ولكنَّ $OA.FA < MA.FA$، فيكون إذاً: $OA.FA < OP.OI$؛ وتكون O، كما في السابق، المسقط على AH لنقطة من Γ ذات الإحداثية الثانية y ولنقطة من ε ذات الإحداثية الثانية Y، ويكون معنا: $OA.FA = y^2$ وَ $OP.OI = Y^2$،

فنحصل على $y < Y$.

يكون للقطع الناقص إذاً نقطة خارج القطع المكافئ، ويكون الرأسان H وَ I داخله؛ لذلك يقطع Γ على نقطتين بحيث تسقط إحداهما على AH بين O وَ I وتسقط الأخرى بين H وَ O.

٣) يكمل ابن الهيثم بعد ذلك الفقرة الأولى مُبَيِّناً أنـَّه عندما يقطع Γ القطعَ ε على الرأس S، فإنـَّه يقطعه على نقطة ثانية.

لنتناول من جديد الشكل ٢٢-١؛ ولتكن O بين M وَ I المُحدَّدة بالمعادلة $MI^2 = MA.MO$، أي أنَّ O هي المُرفَق التوافقي للنقطة A بالنسبة إلى القطع ε؛ ويكون معنا: $\frac{MA}{MO} = \frac{MI^2}{MO^2}$،

فنحصل على $\frac{MA}{MO} = \frac{MA}{MA - MO} = \frac{MI^2}{MI^2 - MO^2} = \frac{MI^2}{HO.OI}$.

لنرمز بِـ y_M إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ Γ التي يكون مسقطُها على المحور النقطة M، ولنرمز بِـ y_O إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ Γ التي يكون مسقطُها، على المحور، النقطة O؛ فيكون معنا: $\frac{MA}{MO} = \frac{{y_M}^2}{{y_O}^2}$.

لنرمز بِـ Y_M إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ ε التي يكون مسقطُها على المحور النقطة M، ولنرمز بِـ Y_O إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ ε التي يكون مسقطُها على المحور النقطة O؛ فيكون معنا: $\frac{{y_M}^2}{{y_O}^2} = \frac{MI^2}{OH.OI} = \frac{AM}{OM}$، فيكون: $\frac{Y_M}{Y_O} = \frac{y_M}{y_O}$؛ ولكنَّ $MS = y_M = Y_M$، فيكون إذاً: $y_O = Y_O$.

وهكذا يكون للقطع المكافئ Γ وللقطع الناقص ε نقطة مشتركة تسقط على AH في النقطة O.

ونتيجة الأمر هي أنَّ القطع المكافئ Γ والقطع الناقص ε يتقاطعان على نقطتين، إذا كان $\frac{HM^2}{MA.AF} \leq \frac{HI}{IK}$، فيكون للمسألة حلان.

ملاحظة: لقد أثبتت البراهين أنَّ الشرط المفروض **كافٍ** لكي يتقاطع Γ وَ ε على نقطتين. وإذا تحقَّق هذا الشرط، تكون إحدى هاتين النقطتين في S رأس القطع الناقص أو على القوس $\widehat{HS}$، وتكون النقطة الأخرى على القوس $\widehat{IS}$.

ويُمكن أن يتقاطع Γ وَ ε على نقطتين من القوس $\widehat{IS}$ أو أن يكون Γ مماسّاً للقطع ε، وهذا ما لا يظهر في المناقشة.

وهكذا يكون الشرط المفروض غير **ضروري**.

دراسة التقاطع بين Γ وَ ε

ليكن Γ قطعاً مكافئاً ذا الرأس A والضلع القائم AF، ولتكن D وَ E نقطتان على محوره. المطلوب هو إيجاد نقطة على Γ بحيث يكون $g = BD + BE$.

لنضع $c = AF$ وَ $l = DE$. ولتكن M وسط DE، ولتكن I وَ H نقطتين على المحور بحيث يكون $MH = MI = \frac{g}{2}$.

يفترض ابن الهيثم، في القضية ٢٢ أنَّ النقطتين D وَ E داخل Γ وأنَّ $DI < AD \Leftrightarrow \frac{g - DE}{2} < AD < AE$.

تكون معنا النقاط إذاً وفقاً للترتيب A، I، D، M، E وَ H. يكون معنا $g = BD + BE$، فيكون إذاً $B \in \varepsilon$، حيث يكون ε القطعَ الناقص ذا البؤرتين D وَ E وذا المحور الأعظم HI.

ليكن $c' = KI$ ضلعه القائم. يكون معنا: $g^2 - l^2 = g.c'$، فيكون إذاً $k = \frac{g^2}{g^2 - l^2} = \frac{g}{c'} = \frac{HI}{IK}$.

لنضع $m = MA$.

نحصل من الشرط $AD > DI$ على $\frac{g}{2} < m$.

معادلة Γ: $y^2 = c.(m - x)$، معادلة ε : $x^2 + k.y^2 = \frac{g^2}{4}$ ، $-\frac{g}{2} \le x \le \frac{g}{2}$ ،

معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع $\Gamma \cap \varepsilon$: $x^2 + k.c(m - x) = \frac{g^2}{4}$،

(١) $0 = x^2 - k.c.x + k.c.m - \frac{g^2}{4} = f(x)$.

ويُكتَب الشرط $\frac{HI}{HK} \le \frac{HM^2}{MA.AF}$ الذي أعطاه ابن الهيثم على الشكل التالي:

$0 \ge k.c.m - \frac{g^2}{4} \Leftrightarrow \frac{g^2}{4.m.c} \ge k$.

ويكفي هذا الشرط لكي يكون للمعادلة (١) جذران يُحقِّقان: $\frac{g}{2} > x'' \ge 0 > x' > -\frac{g}{2}$، إذ إنَّ هذه المعادلة تعطينا: $f(\frac{g}{2}) > 0$، $f(-\frac{g}{2}) > 0$ وَ $f(0) \le 0$.

ولكنَّ هذا الشرط غير ضروريّ. إذا كان $\Delta = k^2c^2 - k.c.x - 4(k.c.m - \frac{g^2}{4}) \ge 0$، مع $\frac{g^2}{4} < k.c.m$ ، يكون للمعادلة جذران موجبان حصراً.

ولكنَّ الشرط $k.c.m - \frac{g^2}{4} \le \frac{k^2c^2}{4}$ ضروريٌّ وكافٍ لكي يكون الجذران حقيقيَّين. ويجب أن نفرض، بالإضافة إلى ذلك، أن يكون الجذران في الفسحة: $\left[-\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right]$. ويكون الجذران (إذا كانا موجودين) من الجهة نفسها بالنسبة إلى $\frac{g}{2}$ أو $-\frac{g}{2}$،لأنَّ $f\left(\pm\frac{g}{2}\right) = k.c\left(m \mp \frac{g}{2}\right) \ge 0$، فيكفي أن نفرض أنَّ مُعدَّلهما $\frac{k.c}{2}$، الذي هو موجِبٌ، أصغر من $\frac{g}{2}$ أو مساوٍ لِـ $\frac{g}{2}$، وهذا ما

يُعادل $k \le \frac{g}{c}$. ويُكتَب الشرطان الكافيان والضروريان : $0 \le \lambda^2 - 4.m.\lambda + g^2$ وَ $g \ge \lambda$، إذا وضعنا $k.c = \lambda$. ويكون لمتعدِّد الحدود $\lambda^2 - 4.m.\lambda + g^2$ جذران موجِبان $2.m \pm \sqrt{4.m^2 - g^2}$، بحيث توجد g بينهما، وذلك لأنَّ $0 > 4.g.\left(\frac{g}{2} - m\right) = g^2 - 4.m.g + g^2$. والمتباينة $0 \le \lambda^2 - 4.m.\lambda + g^2$ تعني أنَّ λ توجَد خارج فسحة الجذرين؛ فيكون الشرطان معادلان إذاً للمتباينة الوحيدة $\lambda \le 2.m - \sqrt{4.m^2 - g^2}$، أي للمتباينة: $\frac{HI}{IK} = k \le 2.\left(\frac{MA - \sqrt{AI.AH}}{AF}\right)$.

ملاحظة: تُكتَب معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع على الشكل الآخر:

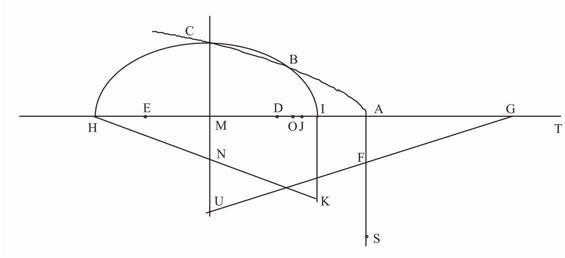
$$\frac{MH^2 - x^2}{AF.\left(\overline{MA} - x\right)} = \frac{HI}{IK}،$$

حيث ينعدم الطرف الأيسر عندما يكون $x = \pm\frac{g}{2}$ ويمرُّ بحدٍّ أقصى μ بين هاتين الإحداثيتين الأوليين. نحصل إذاً على شرط وجود حلّ للمعادلة: $\mu \ge \frac{HI}{IK}$؛ ويُكتب الشرطُ الذي يُقدِّمه ابن الهيثم: $\frac{HI}{IK} \le \frac{MH^2}{AF.\overline{MA}}$، حيث نجد في الطرف الأيمن لهذه المتباينة قيمة الطرف الأيسر للمعادلة عندما يكون $x = 0$؛ وهذا ما يتضمَّن بالطبع المعادلة السابقة. إنَّه من الواضح إذاً أنَّ شرط ابن الهيثم أقوى من اللازم.

ترتكز المناقشة، في الواقع، على تحديد قيمة k التي تجعل القطع الناقص ε مماسّاً للقطع المكافئ Γ. أمّا التحديد الهندسي، فهو أبعد من أن يكون فوريّاً.

٢٣- ليكن Γ فرعاً من قطع زائد. لنتبنَّ فرضيات القضية ٢٢، أي أن تكون D وَ E داخل Γ وأن يكون $AD < \frac{g - DE}{2}$. فتكون النقطتان H وَ I، رأسا القطع الناقص ε، داخل Γ.

ليكن GA محور Γ وليكن FA ضلعه القائم. يقطع الخطُّ MN $(AD \perp MN)$ الخط HK على N ويقطع GF على U.



الشكل ٢٣-١

إذا كانت S النقطة المحدَّدة بالمعادلة: $\frac{SA}{AF}=\frac{HI}{IK}$، يكون معنا: $\frac{SA}{AG}=\frac{HI}{IK}\cdot\frac{AF}{AG}$.

والشرط الذي يُعطيه ابن الهيثم لتقاطع $\mathcal{E}$ مع Γ هو $\frac{SA}{SG}\geq\frac{HM^2}{MA.MG}$.

١) لنفرض أنَّ $\frac{SA}{AG}=\frac{HM^2}{MA.MG}$. يكون معنا:

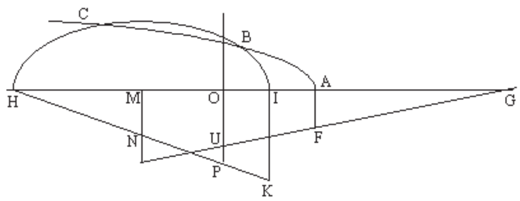
$$\frac{HM^2}{MA.MG}=\frac{NM.MI}{MA.MG}\cdot\frac{HM.MI}{NM.MI}=\frac{NM.MI}{MA.MG}\cdot\frac{HI}{IK}=\frac{NM.MI}{MA.MG}\cdot\frac{SA}{AF}$$ ،

فنستخرج $\frac{MU.MA}{MA.MG}=\frac{MU}{MG}=\frac{AF}{AG}=\frac{NM.MI}{MA.MG}$، فيكون $NM.MI=MU.MA$ (الشكل ٢٣-١).

نُرفق بالنقطة M نقطة على القطع الناقص $\mathcal{E}$ لها الإحداثية الثانية Y، ونقطة على القطع الزائد Γ لها الإحداثية الثانية y؛ يكون معنا على $\mathcal{E}$: $\frac{HM}{MN}=\frac{HI}{IK}=\frac{MH.MI}{Y^2}$، فنحصل على $MN.MI=Y^2$، ويكون معنا على Γ: $\frac{MG}{MU}=\frac{AG}{AF}=\frac{MA.MG}{y^2}$، فيكون $MA.MU=y^2$؛ يكون معنا إذاً: $y^2=Y^2$، فيقطع Γ القطع $\mathcal{E}$ في الرأس C.

٢) لنفرض أنَّ $\frac{SA}{AG}>\frac{HM^2}{MA.MG}$ (الشكل ٢٣-٢).

توجَد نقطة O بين M وَ I بحيث يكون: $\frac{SA}{AG}=\frac{HO.OI}{MA.MG}$.



الشكل ٢٣-٢

ولكنَّ $MA.MG > OA.OG$، فيكون: $\frac{SA}{AG} > \frac{HO.OI}{OA.OG}$.

ليكن OP بحيث يكون $OP // IK$، مع P على HK؛ فيكون معنا: $\frac{SA}{AF} = \frac{HI}{IK} = \frac{HO}{OP}$،

فنحصل على: $\frac{OP.OI}{OA.OG} \cdot \frac{SA}{AF} = \frac{OP.OI}{OA.OG} \cdot \frac{HO.OI}{OP.OI} = \frac{HO.OI}{OA.OG}$، فيكون $\frac{AF}{AG} > \frac{OP.OI}{OA.OG}$.

يتقاطع OP مع GF على النقطة U، ويكون معنا: $\frac{AF}{AG} = \frac{OU}{OG} = \frac{OU.OA}{OA.OG}$، فيكون بالتالي:
$OP.OI > OU.OA$.

نُرفق بالنقطة O نقطة على القطع الناقص $\mathcal{E}$، يكون لها الإحداثية الثانية Y، ونقطة على القطع الزائد Γ، يكون لها الإحداثية الثانية y؛ فيكون معنا: $OI.OP = Y^2$ وَ $OU.OA = y^2$، فيكون $y^2 < Y^2$. ويقطع Γ، إذاً، الخطَّ PO داخل $\mathcal{E}$. ويكون A رأس Γ خارج $\mathcal{E}$، فيقطع Γ، بالتالي، $\mathcal{E}$ على نقطتين موجودتين على جانبَي الخطِّ PO.

٣) يُكمل ابن الهيثم، بعد ذلك، الفقرة الأولى مبيِّناً أنَّه إذا قطَعَ Γ القطعَ الناقص $\mathcal{E}$ على الرأس C، فإنَّه يقطع $\mathcal{E}$ في نقطة أخرى على القوس $\overset{\frown}{CI}$.

لنتناول من جديد الشكل ٢٣-١، لتكن O نقطة بين M وَ I محدَّدة بالمعادلة $\frac{MO}{MI} = \frac{MI}{MA}$، ولتكن J محدَّدة بالمعادلة $\frac{OJ}{JA} = \frac{AS}{AG}$.

يكون معنا: $\frac{OI}{IA} = \frac{MI}{MA} < \frac{IM^2}{MA.MG}$. ولكنَّ لدينا $\frac{OJ}{JA} = \frac{AS}{AG} = \frac{IM^2}{MA.MG}$، ومن جهة أخرى

$\frac{MI}{MA}.\frac{MI}{MG}=\frac{OM}{MI}.\frac{MI}{MG}=\frac{OM}{MG}$ ، فيكون $\frac{OJ}{JA}=\frac{OM}{MG}$.

لنضع $JA = GT$، فنحصل على:

$$.\frac{MJ^2}{MJ.MT}=\frac{IM^2}{MA.MG}=\frac{MJ}{MT}=\frac{MJ}{MG+GT}.=\frac{MJ}{MG+JA}=\frac{OJ}{JA}=\frac{OM}{MG}$$



الشكل ٣٣ـ٣

ولكنَّ $MJ.MT + JA.JG = MA.MG$ ؛ وذلك أنَّ:

$$MJ.MG + JA.(MJ + JG) = (MJ + JA)MG = MA.MG$$

$$MJ.MT + JA.JG = MJ.(MG + GT) + JA.JG =$$

ومن جهة أخرى: $MI^2 - MJ^2 = (HM + MJ)(MI - MJ) = HJ.JI$ ، فيكون إذاً

$$.\frac{MH.MI}{JH.JI}=\frac{MA.MG}{JA.JG}$$ فنحصل على ، $$\frac{IM^2}{MA.MG}=\frac{IM^2-MJ^2}{MA.MG-MJ.MT}=\frac{JH.JI}{JA.JG}$$

لنرمز بـ Y_M وَ Y_J إلى الإحداثيتين الثانيتين لنقطتيْ القطع Γ التي يكون مسقطُهما النقطتين M وَ J على المحور المشترك بين Γ وَ ε ، ولنرمز بـ y_M وَ y_J إلى الإحداثيتين الثانيتين لنقطتَي القطع ε التي يكون مسقطُهما على هذا المحور النقطتين M وَ J. فيكون معنا: $\frac{y_M}{y_J}=\frac{Y_M}{Y_J}$.

ولكنَّ $MC = y_M = Y_M$، فيكون $y_J = Y_J$ ، ويكون بالتالي للقطع الزائد Γ وللقطع الناقص ε نقطة مشتركة يكون مسقطها النقطة J على المحور AH .

وتكون النتيجة أنّه إذا كان $\frac{SA}{SG}\geq\frac{HM^2}{MA.MG}$ يكون للقطعين Γ وَ ε نقطتان مشتركتان ويكون للمسألة حلاّن.

ملاحظة: الشرط الذي أعطاه ابن الهيثم كافٍ، ولكنَّه غير ضروريّ، كما جرى في القضية ٢٢.

الدراسة التحليلية للتقاطع بين Γ و $\mathcal{E}$.

ليكن Γ قطعاً ناقصاً ذا محور $d = AH$ وضلعٍ قائمٍ $c = AF$؛ ولتكن الفرضيات من جهة أخرى مطابقة لفرضيات القضية ٢٢. ونفترض أيضاً أنَّ $\frac{g-DE}{2} < AD$، وهذا ما يُعطي $\frac{g}{2} < m$.

لنضع $m = \overline{AM}$ و $d + m = \overline{GM}$ في المَعْلَم (Mx, My) فيكون معنا:

معادلة Γ: $\frac{d}{c} = \frac{(m+d+x).(m+x)}{y^2}$ ، $x \geq -m$

معادلة $\mathcal{E}$: $x^2 + k.y^2 = \frac{g^2}{4}$ ، $-\frac{g}{2} \leq x \leq \frac{g}{2}$ ،

معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع $\mathcal{E} \cap \Gamma$:

$$k\frac{c}{d}.\frac{(m+x).(m+d+x)}{y^2} = \frac{g^2}{4} - x^2 \text{ ،} \qquad -\frac{g}{2} \leq x \leq \frac{g}{2}$$

$$(١) \qquad f(x) = x^2\left(k\frac{c}{d}+1\right) + k\frac{c}{d}(2m+d)x + k\frac{c}{d}m(m+d) - \frac{g^2}{4} = 0 .$$

ويُكتب الشرط، $\frac{HM^2}{MA.MG} \geq \frac{HI}{IK}.\frac{AF}{AG}$ الذي يُعطيه ابن الهيثم لتقاطع $\mathcal{E}$ مع Γ ، هنا، كما يلي: $\frac{kc}{d}m(m+d) \leq \frac{g^2}{4}$.

ويكفي هذا الشرط لكي يكون للمعادلة (١) جذران يُحقّقان: $-\frac{g}{2} < x' < 0 \leq x'' < \frac{g}{2}$ ، إذ إنَّ هذه المعادلة تعطينا: $f(\frac{g}{2}) > 0$ ، $f(-\frac{g}{2}) > 0$ و $f(0) \leq 0$. وذلك لأنَّ:

$k\frac{c}{d}\left(m+\frac{g}{2}\right)\left(m+d+\frac{g}{2}\right)=f(\frac{g}{2})$ وَ $k\frac{c}{d}\left(m-\frac{g}{2}\right)\left(m+d-\frac{g}{2}\right)=f(-\frac{g}{2})$ مع $\frac{g}{2}<m$.

ولكنَّ هذا الشرط غير ضروريّ.

يساوي مميِّز المعادلة (١): $\Delta=\frac{k^2c^2}{d^2}(2m+d)^2-\frac{4.(k.c+d)}{d}\left[\frac{k.c}{d}.m(m+d)-\frac{g^2}{4})\right]$.

فيكون الشرط الضروريّ والكافي لكي يكون للمعادلة (١) جذران:

$$-\frac{k^2c^2.(2m+d)^2}{4.d(k.c+d)}\leq\left[\frac{k.c}{d}.m(m+d)-\frac{g^2}{4})\right]،$$

وهذا ما يُكتب إذا وضعنا $\lambda=k.c$: $\varphi(\lambda)=\lambda^2+\frac{\lambda}{d}.\left(g^2-4m(m+d)\right)+g^2\geq 0$.

يجب أن نـُضيف إلى هذا الشرط شرطاً آخر لكي يكون جذرا المعادلة محصورين بين $-\frac{g}{2}$ وَ $\frac{g}{2}$. ويساوي نصف مجموع الجذرين $-\frac{\lambda(2m+d)}{2(\lambda+d)}<0$، وهذا ما يجعل الشرط الأخير على الشكل التالي: $g\geq\frac{\lambda(2m+d)}{\lambda+d}$، أي: $\lambda\leq\frac{g.d}{2m+d-g}=\alpha$.

يُكتب مميِّز $\varphi(\lambda)$: $\delta=\frac{1}{d^2}(4m^2-g^2)\left[4(m+d)^2-g^2\right]\geq 0$،

فيكون لِـ $\varphi(\lambda)$ جذران λ_0 وَ λ_1، فيعادل الشرط الأوَّل أن تكون λ خارج الفسحة $[\lambda_0,\lambda_1]$.

ونجد بعد حسابٍ أنَّ: $\varphi(\alpha)=\frac{(2m+d)g(2m-d)[2(m+d)-g]}{(2m+d-g)^2}<0$،

فتكون α بين λ_0 وَ λ_1، فيقتصر الشرطان معاً على المعادلة الوحيدة $\lambda\leq\lambda_0$، أي على:

$$\frac{HI}{IK}=k\leq\frac{2m(m+d)}{c.d}-\frac{1}{2c.d}\sqrt{(4m^2-g^2)[4(m+d)^2-g^2]}=$$

$$2\frac{AM.MG-2MI^2-\sqrt{AH.GH.AI.GI}}{AF.AG}.$$

إذا كان Γ قطعاً ناقصاً مع الفرضيات التي تجعل D وَ E داخل Γ مع $\frac{g-DE}{2}<AD$، أي $DI<AD$، تكون النقطة A، رأس Γ، خارج $\mathcal{E}$، ويكون رأسه الثاني G أبعد من E؛ ويمكن أن تكون G بين E وَ H أو على H أو أبعد من H.



الشكل ٢٣-٤

ويُمكن أن تكون مناقشة التقاطع بين Γ وَ $\mathcal{E}$ مختلفة (انظر لاحقاً).

ملاحظة: يكون معنا: $\frac{SA}{AG}=\frac{x^2-MH^2}{(\overline{AM}+x)(\overline{GM}+x)}$.

والقيمة الحدِّيّة التي أعطاها ابن الهيثم تخصُّ ، كما جرى في الحالات السابقة، الحالة التي يكون فيها للقطعين المخروطيّين نقطة مشتركة في رأس المحور الصغير للقطع $\mathcal{E}$.

دراسة القضايا ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣ وَ ٢٤

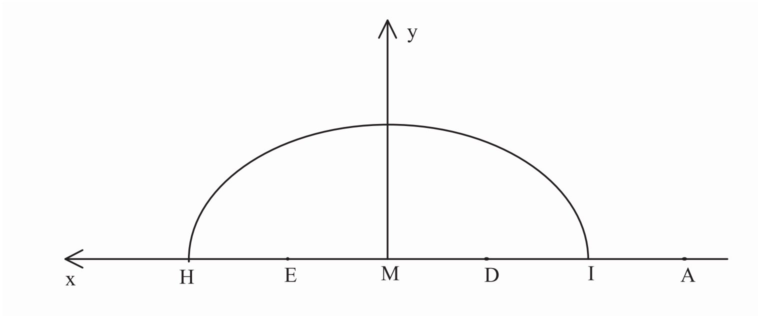
لا يوضِّح ابن الهيثم في نصّ القضية نوع القطع المخروطيّ Γ؛ وهذا لا يُسبِّب أيّة صعوبة في التحليل (٢٠). ولكنَّ من الضروريّ، في القضية ٢١ بخصوص التركيب وبداية المناقشة في الفقرات الثلاث الأولى، أن يتمَّ التمييز بين القطع المكافئ والقطع الزائد من جهة، والقطع الزائد من جهة أخرى.

إنَّ ابن الهيثم، عندما يؤكّد أنّه إذا كانت النقطة I خارج Γ يكون من الضروريّ أن تكون H داخله، يفترض أنَّ للقطع فرعاً غير منتهٍ أي أنَّه قطع مكافئ أو فرع قطع زائد. وهكذا لم يدرس ابن الهيثم حالة القطع الناقص.

يتابع ابن الهيثم المناقشة في القضية ٢٢ حيث يكون Γ قطعاً مكافئاً ، وفي القضية ٢٣ حيث يكون Γ قطعاً زائداً، وينهي القضية ٢٣ قائلاً إنَّ Γ قطع ناقص[٢٦]. ولكن إذا كان

[٢٦] انظر ص. ٢٤٩.

Γ قطعاً ناقصاً، يجب علينا أن نــُميِّز بين عدة حالات وفقاً لموضع G، الطرف الثاني لمحور Γ؛ ولكنَّ الشرط الذي يعطيه ابن الهيثم، $\frac{SA}{SG} \geq \frac{HM^2}{\overline{MA}.\overline{MG}}$، كافٍ في جميع الحالات لكي يكون للمسألة حلٌ واحد على الأقلّ(حلٌ أو حَلان).



الشكل ٢٣ـ٥

تقاطع القطعين الناقصين ε و Γ وفقاً لفرضيات القضية ٢٣.

معادلة ε : $\frac{MH^2 - x^2}{y^2} = \frac{HI}{IK}$ ، مع $(\frac{g}{2} = \overline{MH})$.

معادلة Γ : $\frac{(\overline{AM} + x)(\overline{GM} + x)}{y^2} = -\frac{AG}{AF}$ ، (مع $0 > \overline{GM}$ و $\overline{AM} < \frac{g}{2}$).

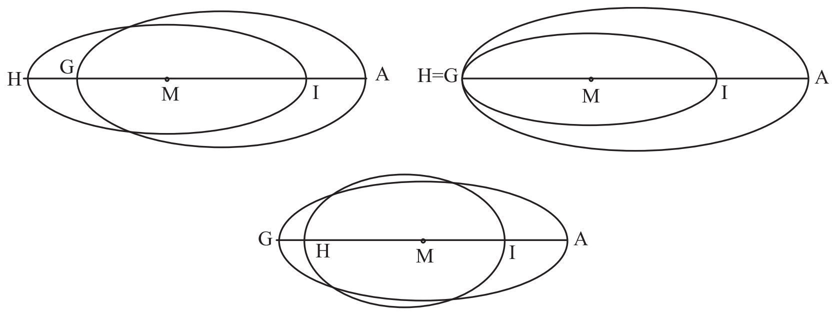
يجب أن نــُميِّز بين ثلاث حالات وفقاً لكون H أبعد من G (خارج Γ)، أو في G أو بين M و G (داخل Γ). يقطع ε ، في الحالة الأولى، القطعَ Γ بالضرورة لأنَّ رأسه الثاني I موجود داخل Γ. يكون ε ، في الحالة الثانية، مماسّاً للقطع Γ في رأسهما المشترَك G. يبقى علينا أن نناقش مسألة التقاطع في الحالة الثالثة حيث يكون $MH < MG$.

معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع هي: $\frac{SA}{AG}.(\overline{AM} + x)(\overline{GM} + x) = x^2 - HM^2$ ،

أي أنَّ $f(x) = \frac{SA}{AG}\overline{AM}.\overline{GM} + HM^2 + x\left(\overline{AM} + \overline{GM}\right)\frac{SA}{AG} + \left(\frac{SA}{AG} - 1\right)x^2 = 0$.

يكون معنا: $f\left(\pm\frac{g}{2}\right) = \left(\overline{AM} \pm \overline{MH}\right)\left(\overline{GM} \pm \overline{MH}\right)\frac{SA}{AG} \geq 0$ ، لأنَّ $0 < \overline{MH} < \overline{AM}$ و

$\overline{GM} > \overline{MH}-$؛ ويكون معنا، إضافة إلى ذلك: $f(0) = \frac{SA}{AG}\overline{AM}.\overline{GM} + MH^2$ ، والشرط $\frac{SA}{SG} \geq \frac{HM^2}{\overline{MA}.\overline{MG}}$ الذي يُعطيه ابن الهيثم يعني أنَّ $f(0) = 0$، وهذا ما يتضمَّن وجود الجذر x_1 بين 0 وَ $-\frac{g}{2}$ والجذر x_2 بين 0 وَ $\frac{g}{2}$.



الشكل ٢٣-٦

إذا كان $\frac{SA}{SG} < 1$، تنعدم $f(x)$ بين $-\infty$ وَ $-\frac{g}{2}$ وبين $\frac{g}{2}$ وَ $+\infty$؛ ولكنَّ هذين الجذرين لا يتوافقان مع نقاط على القطع الناقص ε ، فلا يوجَد حلّ للمسألة. إذا كان $\frac{SA}{SG} = 1$، تنعدم $f(x)$ مرَّة واحدة (f هي من الدرجة الأولى) بالضرورة خارج الفسحة $\left[-\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right]$. لنفرض أنَّ $\frac{SA}{SG} > 1$؛ يكون معنا مميِّز f:

$$\Delta = \frac{SA^2}{AG^2}\left(\overline{AM} + \overline{GM}\right)^2 - 4\left(\frac{SA}{AG} - 1\right)\left(\frac{SA}{AG}\overline{AM}.\overline{GM} + HM^2\right) =$$

$$\varphi\left(\frac{SA}{AG}\right) = GA^2.\frac{SA^2}{AG^2} + 4\left(\overline{AM}.\overline{GM} - HM^2\right)\frac{SA}{AG} + 4HM^2$$

وهو عبارة من الدرجة الثانية بالنسبة إلى $\frac{SA}{SG}$، فنكتب مميِّزها:

$$\delta = 4\left[\left(\overline{AM}.\overline{GM} - HM^2\right)^2 - \frac{SA}{AG} + HM^2.GA^2\right].$$